УДК 51(077)(063)
ББК 22.1л0
С56

*Рекомендовано к печати учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ*

Под общей редакцией *З. А. Дулатовой*

С56 **Математика** и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XIII Всерос. науч.-практ. конф. Иркутск, 26–28 марта 2020 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2020. – 210 с.
ISBN 978-5-9624-1807-0

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

УДК 51(077)(063)
ББК 22.1л0

Научное издание

**Математика и проблемы обучения математике
в общем и профессиональном образовании**

Материалы XIII Всероссийской научно-практической конференции
Иркутск, 26–28 марта 2020 г.

Материалы печатаются в авторской редакции.
Ответственность за достоверность и корректность изложения несут авторы статей
Подготовила к печати: *Л. М. Козьмина*

Темплан 2020. Поз. 20
Подписано в печать 24.03.2020. Формат 60×90 1/16
Уч.-изд. л. 10,1. Усл. печ. л. 13,1. Тираж 100 экз. Заказ 25
Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124

СОДЕРЖАНИЕ

В.Н. Агейчик

МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, г. Иркутск

А.Г. Зенцов

Лицей №36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

ШКОЛА СЕГОДНЯ И АКТУАЛЬНОСТЬ ФУЗИОНИЗМА В ОБУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ.

В XIX веке совместное преподавание различных школьных предметов, например, физики и математики, химии и биологии было названо фузионизмом (*fusio – слияние)*. Фузионизмом также называли слитное преподавание нескольких разделов математики: алгебры и геометрии; геометрии и арифметики; планиметрии и стереометрии.

Еще в середине XVIII века Д'Аламбер составил план курса геометрии, который носил более практический характер и содержал элементы совместного изложения начал планиметрии и стереометрии. Идея слитного преподавания плоской и пространственной геометрии понравилась Н.И. Лобачевскому. В 1823 году им был написан учебник «Геометрия», который историки математики называют одним из первых фузионистских курсов геометрии. На первом съезде преподавателей математики, проходившем с 27 декабря 1911 г. по 3 января 1912 г. в Петербурге, профессор С.А. Богомолов предложил разбить школьный курс геометрии на пропедевтическую и систематическую части и первую из них строить на фузионистской основе [1]. Эта идея была поддержана и одобрена съездом.

Во второй половине XX века фузионизм у нас нашел воплощение в различных программах, курсах, пособиях. Единый фузионистский курс «Геометрия 5-11» пропагандировал В.А. Гусев. Варианты пропедевтических курсов наглядной геометрии для 5-6 классов, использующие идеи фузионизма, были предложены В.А. Гусевым, Г.А. Клековкиным. Г.Г. Левитасом. В 1996 г. было издано учебное пособие по стереометрии для 7-9 классов [2], в 1999 г. появился фузионистский учебник для 7 кл. [3].

Что сегодня усиливает фузионизм во всех его смыслах? Начнем с современной начальной школы, одна из задач которой – развитие пространственного мышления. Разработаны дополнительные курсы для 1-4 кл. по математике и информатике, включающие наглядную геометрию на фузионистской основе [5].

Для учащихся 5-6 классов разработаны курсы и изданы пособия по наглядной геометрии коллективами московских (И.Ф. Шарыгин, Л.Н. Ерганжиева), томских (В.А. Панчищина, Э.Г. Гельфман, В.Н. Ксенева, Н.Б. Лобаненко), петербургских (Т.Г. Ходот, С.В. Софронова, А.Ю. Ходот) авторов. В 2017 г. было издано пособие «Наглядная геометрия» Смирновых [6]. Перечисленные пособия играют не только пропедевтическую роль для планиметрии 7-9 классов, но и способствуют развитию пространственного мышления у младших школьников.

Задачей национального проекта РФ «Образование» является: внедрение новых методов обучения и воспитания, современных образовательных технологий, а также обновление содержания и совершенствование методов обучения предмету «Технология». Этот предмет уже сегодня запрашивает определенную стереометрическую подготовку учащихся основной школы.

Мы уверены, что более глубокий анализ школы сегодня только подтвердит необходимость максимально сближенного во времени обучения стереометрии и планиметрии. Должны работать составленные фузионистские курсы в основной школе и разрабатываться новые, отвечающие сегодняшним переменам.

Считаем, что задачный материал является главной составной частью таких курсов. О задачах для младших школьников мы писали в статье «Геометрический старт математического образования младших школьников» [4]. Приведем примерный набор задач «Плоскость – пространство» для младших школьников:

1. Сколько квадратиков 1×1 надо приложить справа к полоске 1×11, чтобы периметр новой полоски оказался в два раза больше периметра старой?

2. Дан прямоугольный брусок 11×2×2. Его удлинили вдоль наибольшего ребра так, что площадь поверхности нового бруска оказалась вдвое больше площади поверхности данного. Сколько кубиков 1×1×1 при этом добавлено?
3. Квадрат со стороной 12 разрезан на три прямоугольника с одинаковыми периметрами. Какими могут быть стороны этих прямоугольников? Укажите все варианты.
4. Куб со стороной 14 разрезан на три прямоугольных параллелепипеда с одинаковыми площадями поверхности. Какими могут быть стороны этих параллелепипедов? Укажите все варианты.
5. Прямоугольник разбит на четыре меньших прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Периметры трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 20, 12 и 11. Найдите периметр четвертого прямоугольника.
6. Деревянный брусок тремя распилами распилили на восемь меньших брусков. На рис. 5 у семи брусков указана их площадь поверхности. Какова площадь поверхности невидимого бруска?

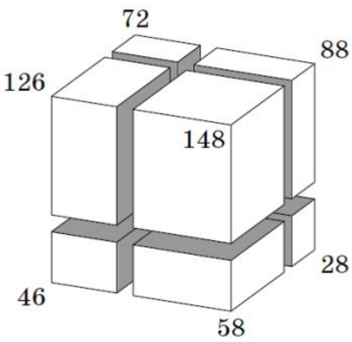


Рис. 5

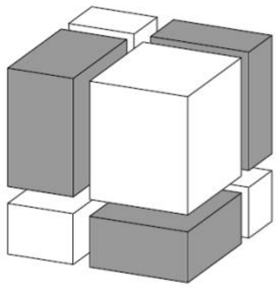
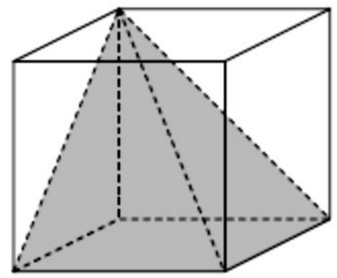


Рис. 6

7. Прямоугольник разбит на четыре маленьких прямоугольника двумя прямолинейными разрезами. Площади трёх из них, начиная с левого верхнего и далее по часовой стрелке, равны 18, 15 и 20. Найдите площадь четвёртого прямоугольника.
8. Прямоугольный брусок разрезали на четыре прямоугольных бруска, проведя две плоскости. Объёмы трёх из них известны. Как найти объём четвертого бруска?
9. Прямоугольник разрезан на несколько (более одной) различных фигурок из 6 клеток. Какая наименьшая площадь может быть у такого прямоугольника? Покажите, как это сделать.

10.Прямоугольный параллелепипед разрезан на несколько (более одной) различных фигурок из 12 кубиков. Какой наименьший объём может быть у такого параллелепипеда? Покажите, как это сделать.

11.Можно ли замостить все пространство равными тетраэдрами, все грани которых – прямоугольные треугольники?



12.Какую часть кубической коробки может занимать лежащая в ней (неправильная) четырёхугольная пирамида (см. рис. слева)?

13.Разрежьте куб на 6 равных треугольных пирамид.

14. Пространственная теорема Пифагора: квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Для учащихся 7-9 классов предлагаем включить задачи на объем пирамиды, поскольку с задачами на объем куба и прямоугольного параллелепипеда учащиеся в рамках наглядной геометрии справляются. Более того, мы предлагаем вывод формулы объема пирамиды на основе принципа Кавальери.

На рис. 1 тетраэдры *ABCD* и *ABCD'* с общей гранью *ABC* имеют равные высоты, плоскости π_1, π_2 параллельны. Треугольники *A'B'C'* и *A''B''C''* (неделимые), получающиеся при пересечении данных тетраэдров произвольной плоскостью π_3, параллельной первым двум плоскостям, равны и имеют равные площади. Значит, объемы таких тетраэдров равны («две стопки равных блинов заполняют один объем»).

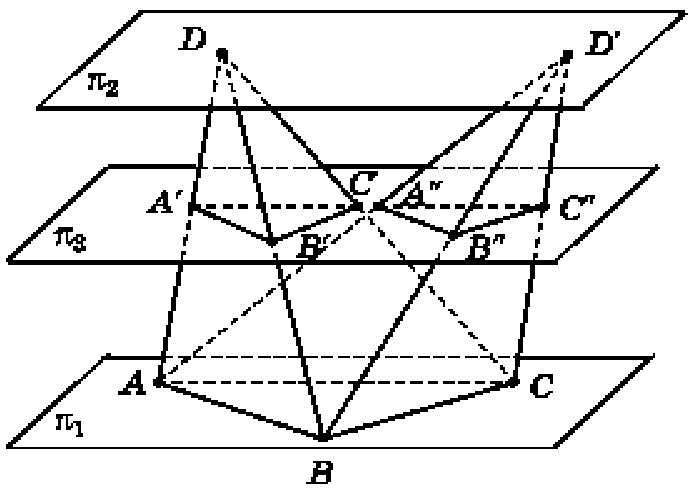


Рис. 1

Давид Гильберт на II Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 году сформулировал 23 проблемы математики. Они охватывали основания математики, алгебру, теорию чисел, геометрию, вещественный и комплексный анализ.

Третья проблема Гильберта посвящена вопросам равносоставленности многогранников: возможности разрезания двух многогранников равного объёма на конечное число равных частей-многогранников. Имевшиеся способы доказательства формулы для объёма тетраэдра (1/3 произведения высоты на площадь основания) были связаны с предельными переходами. В предложенной Гильбертом формулировке речь шла о равносоставленности тетраэдров (о доказательстве невозможности такого разбиения в общем случае), она естественно расширяется до вопроса о равносоставленности произвольных многогранников заданного объёма (о необходимых и достаточных для этого условиях).

Третья проблема считается методической, связанной с преподаванием [7]. Пример неравносоставленных тетраэдров равного объёма был предъявлен уже в 1901 году, в работе М. Дена, ученика Гильберта. Таким образом, выведение формулы объема тетраэдра возможно только через предельные переходы или интегрирование.

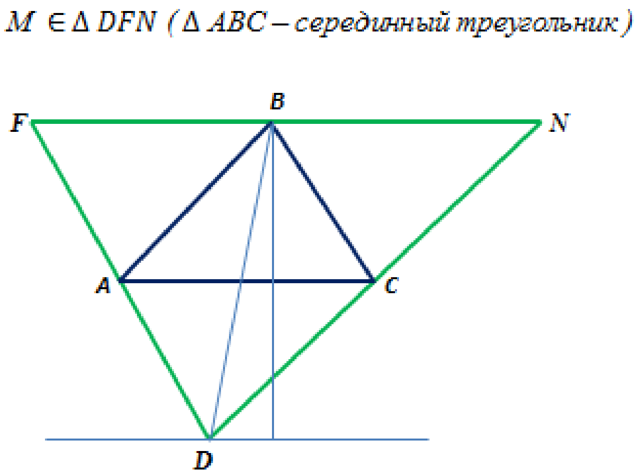
По степени строгости суммирование неделимых по принципу Кавальери не уступает школьному интегрированию, а по наглядности доступно в среднем звене, начиная с площадей фигур. Тем более, на примере площадей мы можем сравнивать решения на основе равносоставленности с одной стороны и суммированием неделимых с другой. Напомним, что два многоугольника равносоставлены, если один из них можно перекроить в другой (то есть разрезать на части, переложив которые, можно получить другой). Любые два равносоставленных многоугольника равновелики. Верно и обратное утверждение (теорема Бойяи-Гервина).

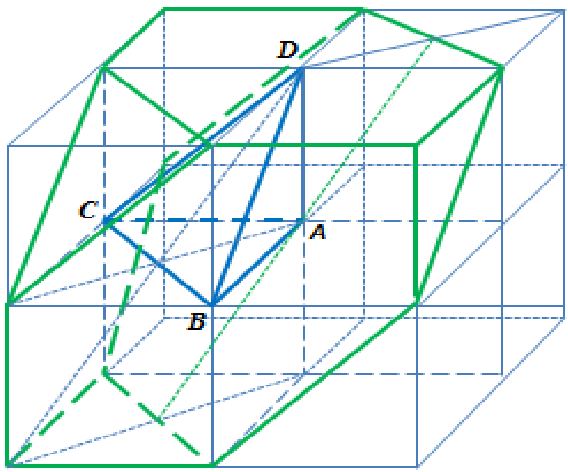
Задачи с объемом пирамиды (тетраэдра), содержательны с точки зрения методологии и методики, через эти задачи можно проводить интересные аналогии на плоскости и в пространстве. Например, биссекторная плоскость в тетраэдре делит ребро в отношении, равном отношению площадей граней двугранного угла, аналогично свойству биссектрисы треугольника, делящей сторону в отношении, равном отношению длин сторон угла. Применяем метод площадей для треугольника, метод объемов для тетраэдра. Еще пример: отношение объемов двух тетраэдров с общим трехгранным углом находится аналогично отношению площадей двух треугольников с общим углом.

В завершении приведем две задачи, рассмотренные на 17-м геометрическом семинаре (Педагогический институт, ФГБОУ «ИГУ»):

1. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M, таких, что $S_{\Delta MAB} < S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta MBC} < S_{\Delta ABC}$, $S_{\Delta MAC} < S_{\Delta ABC}$.

2. Дана пирамида $DABC$, объём которой равен V. Найдите геометрическое место точек M, таких, что $V_{MABC} < V$, $V_{MBCD} < V$, $V_{MACD} < V$, $V_{MABD} < V$.





Литература

1. Клековкин, Г.А. Роль и место фузионизма в школьном геометрическом образовании [Текст] / Г.А. Клековкин // Образование и наука. – 2012. – № 2(91).
2. Вернер, А.Л. Стереометрия. Учеб. пособие для 7-9 классов общеобразовательной школы. [Текст] / А.Л. Вернер, Т.Г. Ходот. – Спб: «Специальная Литература», 1996. – 192 с.

3. Вернер, А.Л. Геометрия: Учеб. для 7 кл. общеобразоват. учреждений [Текст]/ А.Л. Вернер, В.И. Рыжик, Т.Г. Ходот – М.: Просвещение, 1999. – 192 с.
4. Истомина, Н.Б. Математика и информатика: Наглядная геометрия. Тетрадь для 4 кл. общеобразоват. организаций [Текст] /Н.Б. Истомина, З.Б. Редько. – Смоленск: Ассоциация XXI век, 2019. – 48 с.: ил. – (Внеурочная деятельность.)
5. Смирнов, В.А. Наглядная геометрия. [Текст]/ В.А. Смирнов, И.М. Смирнова, И.В. Ященко. 2-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2017. – 272 с.
6. Агейчик, В.Н. Геометрический старт математического образования младших школьников [Текст]/ В.Н. Агейчик, А.Г. Зенцов // Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании»: Материалы X Всероссийской. науч.-практ. конф. учителей и преподавателей математики (28–30 марта 2017 г.). – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2017.
7. Болтянский, В.Г. Третья проблема Гильберта [Текст]/ В.Г. Болтянский. – Глав. ред. Физ-мат. литературы. – М.: Наука, 1977. 208 с.
8. Левитас, Г.Г. Фузионизм в школьной геометрии // Математика в школе. – 1995. – №6. – с. 21–26.
9. Гусев, В.А. Методика обучения геометрии: учеб.пособие для студ. выш. пед. учеб. заведений / В.А. Гусев, В.В. Орлов, В.А. Панчищина и др.; под ред. В.А. Гусева – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 386с.
10. Смирнова, И. М. Идея фузионизма в преподавании школьного курса геометрии //Математика. – 1998. – № 17.