УДК 51 + 371.3 + 681.14

ББК 74.62 + 74.262 + 74.262.9

С 56

Рекомендовано к печати Учебно-методическим советом

Педагогического института Иркутского государственного университета

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании: материалы X Всероссийской научно-практической конференции, посвященной 90-летию со дня рождения профессора Бориса Альбертовича Бельтюкова. – Редактор Дулатова З.А. – Иркутск: ООО «Издательство Оттиск», 2017. – 251с.

ISBN 978-5-9909345-8-0

В материалах X Всероссийской научно-практической конференции отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний. Статьи печатаются в авторской редакции: за достоверность и корректность изложения ответственность несут авторы статей.

Редактор З.А. Дулатова

УДК 51 + 371.3 + 681.14

ББК 74.62 + 74.262 + 74.262.9

ISBN 978-5-9909345-8-0

В.Н. Агейчик , А.Г. Зенцов
Негеометрия 114

Н.Н. Штыков
Задачи с конструкциями в математических олимпиадах 124

М. Н. Полякова
Метод консалтинга при проведении внеклассного занятия 129

С.В. Артемьева, Т.С. Курьякова
Применение неравенства Коши при решении уравнений 141

Н.М. Кузуб, В.А. Циомик
Об орнаментах на плоскости 145

В.А. Макеева
Урок-экскурсия как средство практико-ориентирующего
обучения математике в 5-7 классах в соответствии
с психолого-педагогическими особенностями обучающихся 151

С.В. Артемьева, Т.С. Курьякова, Е.Е. Смертина
Распознавание четных и нечетных функций
в задачах с параметрами 157

Г.В.Буркина
Предмет математики в агрошколе 161

Е.С. Коваленко, Н.М. Кузуб, Л.А. Бондарчук
Формирование познавательных универсальных учебных
действий при решении задач методом вспомогательной
окружности 163

Раздел II. Оценка результатов обучения в современных условиях 168

Г.С. Пецевич, И.И. Хулугурова
Зачет как одна из форм организации контроля при подготовке
к ЕГЭ по математике 168

Е. А. Шевчук
Практико-ориентированное обучение на уроках математики при
подготовке к ГИА 176

В.Н. Агейчик
МАОУ «Лицей ИГУ г. Иркутска», г. Иркутск
А.Г. Зенцов
«Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

НЕГЕОМЕТРИЯ

В данной статье мы рассматриваем примеры задач школьной алгебры, при решении которых можно применять геометрию. Применение геометрии в алгебраических задачах имеет богатую историю и являет единство математики как науки и как школьного предмета. Развитие аналитических и геометрических навыков, формирование геометрической культуры – все эти компоненты в методологической взаимосвязи отвечают целям математического образования.

Наш опыт показывает, что элементы геометрической алгебры можно осваивать уже в рамках наглядной геометрии, и с опорой на эти элементы развивать далее это направление в процессе обучения как на уроках, так и на спецкурсах.

1. При каком значении параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$. Это уравнение в системе координат XOA задает окружность с центром (3; 2) и радиусом 1 (рис. 1). Наибольшее расстояние между точками окружности, лежащими на одной прямой, параллельной оси абсцисс, равно 2 и достигается при $a = 2$.

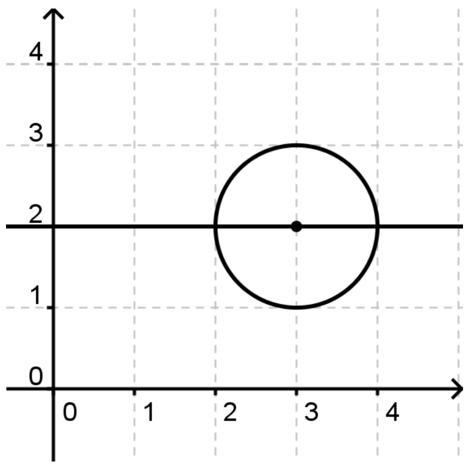


Рис. 1

Ответ: $a = 2$.

2. Решите уравнение $\sqrt{13 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 2\sqrt{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим треугольники ACD и BCD с общей стороной $CD = 2$ (рис. 2). $\angle ACD = x$, $AC = 3$, по теореме косинусов $AD = \sqrt{13 - 12\cos x}$. Угол BCD равен $\frac{\pi}{2} - x$, $BC = \sqrt{3}$, $BD = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x}$. В треугольнике ABC гипотенуза AB равна $2\sqrt{3}$, значит, равна сумме данных корней. Следовательно, точка D

принадлежит гипотенузе *AB*. Применяя метод площадей для треугольников *ACD*, *BCD* и *ABC* получаем $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, откуда $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ и $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

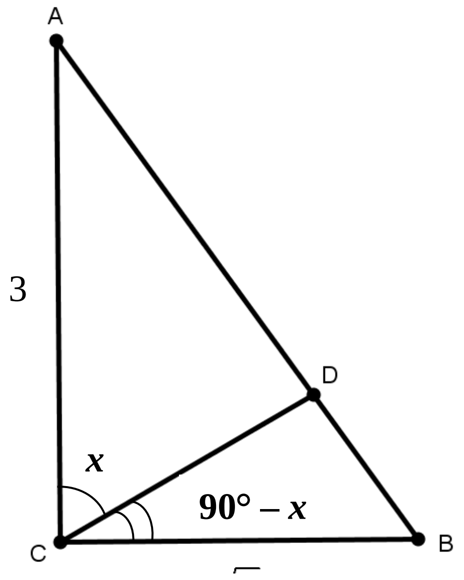


Рис. 2

<u>Ответ</u>: $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

3. Найдите значение x, при котором сумма $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$ минимальна.

<u>Решение.</u> $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} =$

$$= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = AC + CB$$

(рис. 3), где $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C(x;\ 0)$. Сумма *AC* + *CB* будет минимальной, если равны острые углы, которые составляют прямые *AC* и *CB* с осью *OX* *(задача Герона)*. Искомое значение x_0 находим из следующей пропорции:

$\frac{AP}{PC} = \frac{BN}{CN}$, $AP = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $BN = \frac{1}{2}$, $PC = x_0 - \frac{1}{2}$,

$CN = \frac{\sqrt{3}}{2} - x_0$. Тогда $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

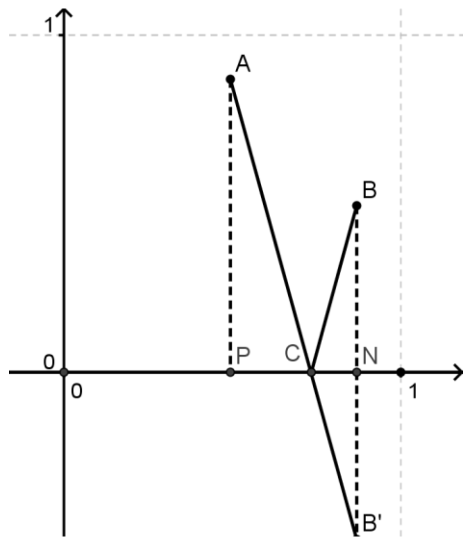
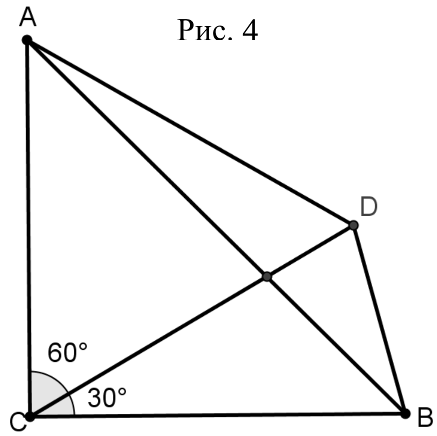


Рис. 3

<u>Ответ</u>: $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

Если поставлена задача найти только наименьшее значение выражения $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$, то для решения рассмотрим треугольники *ACD* и *BCD* с общей стороной *CD* = *x* (рис. 4). Угол *ACD* равен 60°, *AC* = 1, $AD = \sqrt{1 + x^2 - x}$ (теорема косинусов). Угол *BCD* равен 30°, *BC* = 1, $BD = \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$. Ломаная *ADB* имеет наименьшую длину, если вершина *D* принадлежит гипо-

Рис. 4



тенузе AB равнобедренного треугольника ACB. Искомое значение равно $\sqrt{2}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-5)^2+9}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{4+(y-4)^2}.$$

<u>Решение.</u> На плоскости XOY (рис. 5) зададим следующие точки: $A(2;\ 4)$, $B(5;\ 3)$, $C(x,\ 0)$, $E(0,\ y)$. Тогда первый корень – это длина отрезка BC, второй корень – длина CE и третий корень – длина AE. Точка $P(-2;\ 4)$ симметрична A относительно оси OY, точка $M(5;\ -3)$ симметрична B относительно OX. Длина ломаной $AECB$ равна длине ломаной $PECM$, так как $EA = EP$ и $CB = CM$. Ломаная $PECM$ имеет наименьшую длину, если точки E и C расположены на отрезке PM, равном $7\sqrt{2}$.

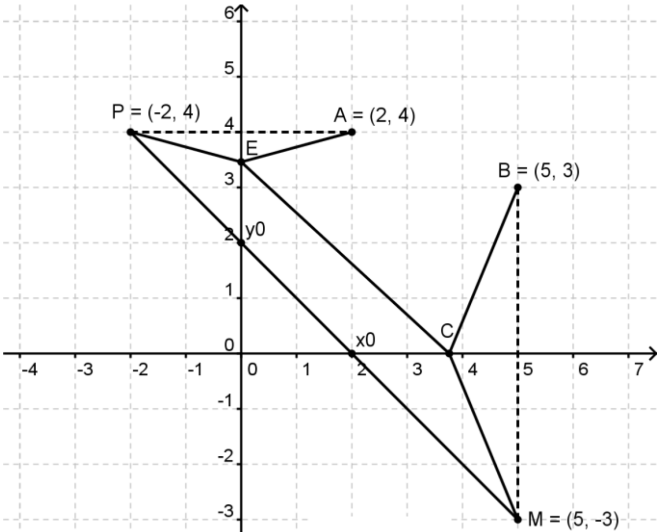


Рис. 5

<u>Ответ</u>: $7\sqrt{2}$.

Заметим, что составив уравнение прямой PM, мы можем найти значения x_0 и y_0, при которых данная сумма корней будет наименьшей.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2},\ \text{если}\ x-y-3=0.$$

<u>Решение.</u> Данную сумму можно интерпретировать, как сумму расстояний от точки $C(x,\ y)$ прямой a, заданной уравнением $x - y - 3 = 0$, до точек $O(0;\ 0)$ и $A(4;\ 3)$ на плоскости XOY (рис. 6). Точка $C(x_0, y_0)$, отвечающая условию задачи, расположена на отрезке AP, где точка $P(3;\ -3)$

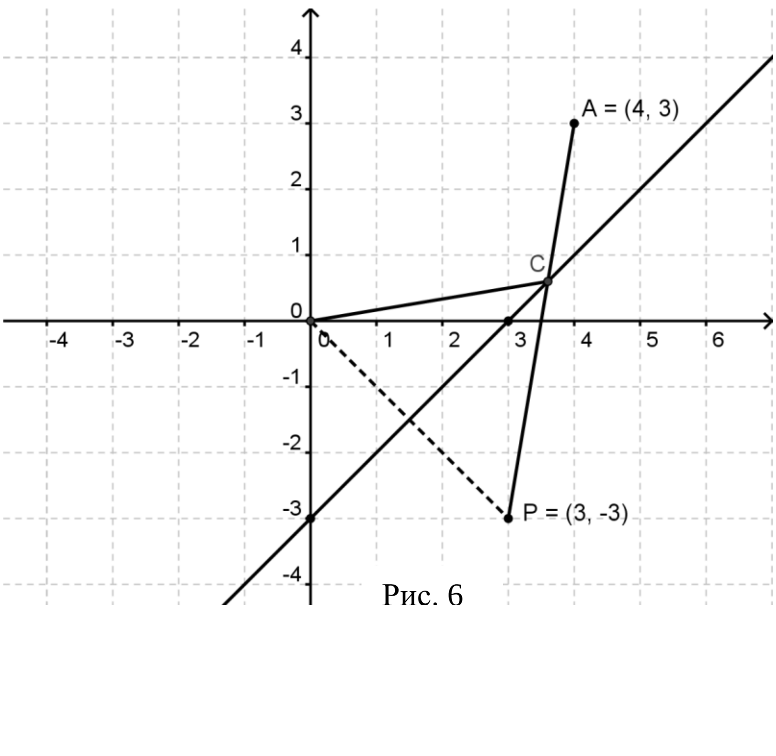


Рис. 6

симметрична O относительно прямой a *(задача Герона)*. Длина отрезка AP, равная $\sqrt{7}$, есть искомое значение.

Ответ: $\sqrt{7}$.

6. Определите все значения, которые может принимать выражение $3x – 2y$, если $x^2 + y^2 = 13$.

Решение. Пусть $3x – 2y = a$. Искомые значения a можно найти, исследуя взаимное расположение окружности с радиусом $\sqrt{13}$ (рис. 7) и прямых вида $y = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2}$. Рассмотрим треугольник AOB (рис. 8). Прямая AB – касательная к окружности. Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle BOK = \alpha$. Зная, что $\operatorname{tg} \alpha = 1{,}5$ и $OK = \sqrt{13}$, найдем $OB = 6{,}5$. $|a| = 2OB$, следовательно, $–13 \le a \le 13$.

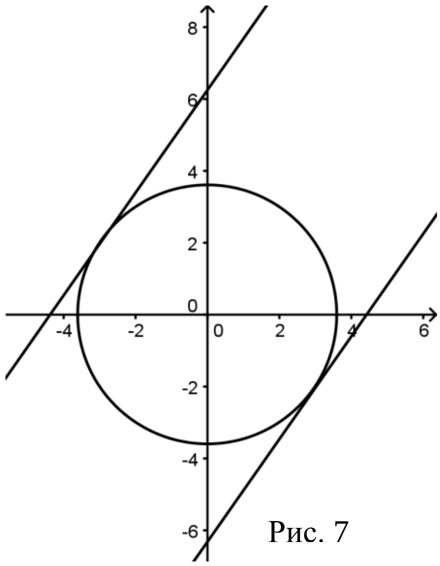


Рис. 7

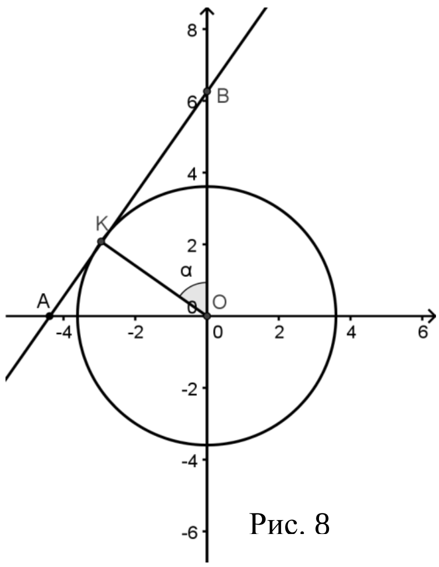


Рис. 8

Можно найти a, применив формулу расстояния от точки O до прямой $3x – 2y – a = 0$.

$\sqrt{13} = \frac{|a|}{\sqrt{13}}$, $|a| = 13$.

Ответ: [–13; 13].

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение запишем в виде $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2}$ + $+ \sqrt{(x-10)^2 + (y-5)^2} = 10$. Первый корень – расстояние (рис. 9) между точками $C(x, y)$ и $A(2; – 1)$. Второй корень – расстояние между точками $C(x, y)$ и $B(10; 5)$. Так как $AB = 10$ и сумма

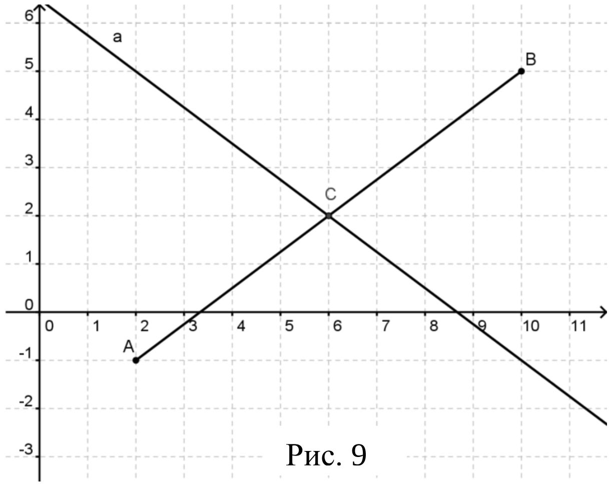


Рис. 9

$AC + CB = 10$, то точка C расположена на отрезке AB и является точкой пересечения прямых AB и a, заданных уравнениями $3x - 4y = 10$ и $3x + 4y = 26$ соответственно.

Ответ: (6; 2)

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2} \geq 2\sqrt{5}, \\ \sqrt{x^2+(y-8)^2} + \sqrt{(x-6)^2+(y-4)^2} \leq 2\sqrt{13}. \end{cases}$

Решение. Рассмотрим второе неравенство. Первый корень – расстояние (рис. 10) между $C(x,\ y)$ и $B(0; 8)$. Второй корень – расстояние между $C(x,\ y)$ и $A(6; 4)$. $AB = 2\sqrt{13}$ и $CB + CA \leq 2\sqrt{13}$, следовательно, точка C расположена на отрезке AB. В первом неравенстве $\sqrt{x^2+y^2} = CO,$ второй корень – расстояние между C и $D(2;\ 4)$. $CO \geq\ CD + 2\sqrt{5}$. Так как $OD = 2\sqrt{5}$ и $CO \geq CD + OD$, делаем вывод, что точка C расположена на прямой OD и является точкой пересечения прямых OD и AB, заданных уравнениями $y = 2x$ и $2x + 3y - 24 = 0$ соответственно.

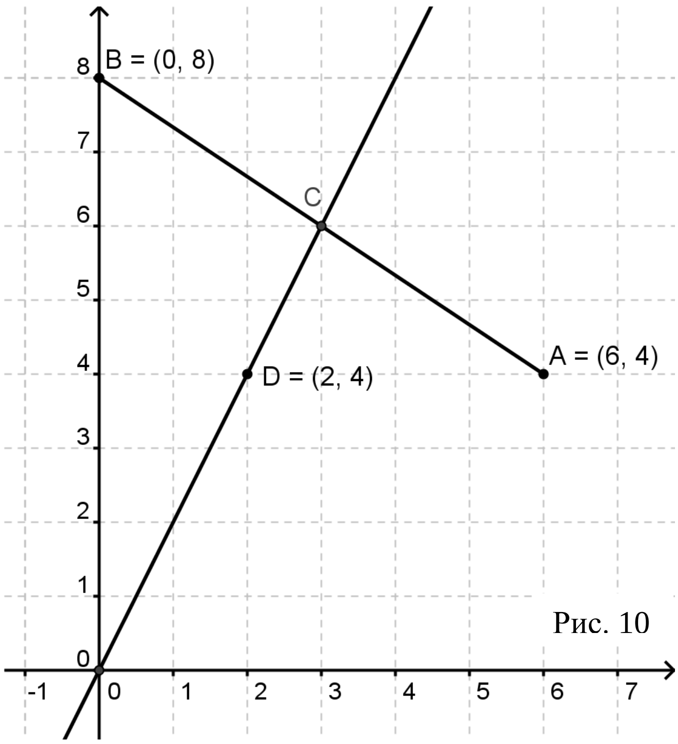


Рис. 10

Ответ: (3; 6)

9. Решите в целых числах уравнение $\sqrt{x^2+(y-4)^2} + \frac{1}{\sqrt{5}}|x-2y-2| = 2\sqrt{5}.$

Решение. Интерпретируем корень, как расстояние между точками $B(0; 4)$ и $C(x\ ,\ y)$ на плоскости XOY (рис. 11). Второе слагаемое уравнения – это расстояние от точки C до прямой a, заданной уравнением $x - 2y - 2 = 0$. Прямая a пересекает OX в точке $A(2; 0)$, при этом $AB = 2\sqrt{5}$ и прямая AB пер-

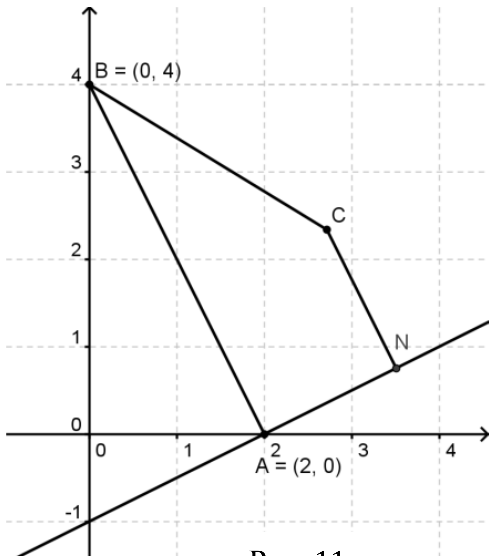


Рис. 11

пендикулярна a (следует из подобия прямоугольных треугольников, или проверяется теоремой Пифагора). Пусть точка N – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую a. Тогда равенство $BC + CN = AB$ выполняется при условии принадлежности точки C отрезку AB, на котором расположены следующие целочисленные точки: (0; 4), (1; 2), (2; 0).

Ответ: (0; 4), (1; 2), (2; 0).

10. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-a)^2+(y-a^2)^2} = |a|\sqrt{1+a^2}, \\ (x-4)^2+y^2 = 1, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Точка $C(x\ ,\ y)$ на координатной плоскости принадлежит окружности ω с центром в точке $E(4; 0)$ и радиусом 1 (рис. 12). $OC = \sqrt{x^2+y^2}$. Точка $A(a,\ a^2)$ удалена от начала координат на расстояние, равное $|a|\sqrt{1+a^2}$. Первое уравнение запишем в виде суммы $OC = OA + AC$. Равенство выполняется, если точка A параболы $y = x^2$ принадлежит отрезку OC. Единственное решение система имеет при условии касания прямой OC и ω. Уравнение касательной $x - \sqrt{15}y = 0$. Значения a находим из уравнения $a - \sqrt{15}a^2 = 0$. При $a = \frac{\sqrt{15}}{15}$ система имеет единственное решение.

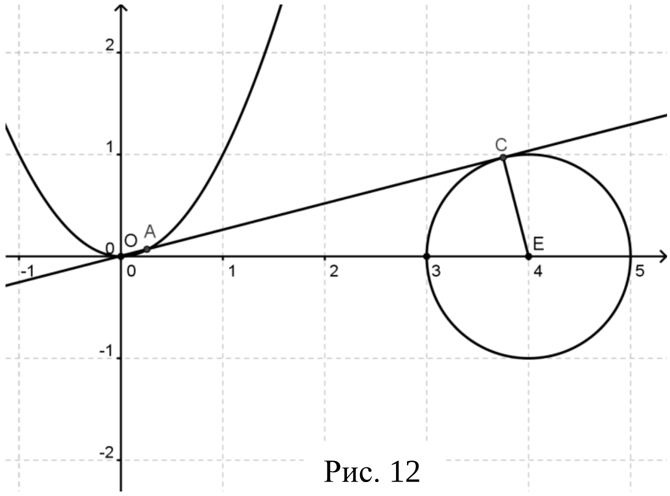


Рис. 12

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

11. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x, y, z укажите значение выражения $xy + yz$.

Решение1. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x; y)$ и $\vec{b}(z; -y)$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Из третьего равенства следует, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны. Рассмотрим вектор

$\vec{c}(y;\, z)$. Он перпендикулярен вектору $\vec{b}$, а, значит, коллинеарен вектору $\vec{a}$, и даже сонаправлен с ним (координаты положительны). Тогда $xy + yz = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 4 = 12$.

<u>Решение 2.</u> Рассмотрим прямоугольные треугольники с общим катетом y и катетами x и z, лежащими на одной прямой (рис. 13). Из третьего равенства получаем, что угол $ACB = 90°$ и ABC – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и площадью, равной 6. Величина $xy + yz$ – удвоенная площадь. Она равна 12.

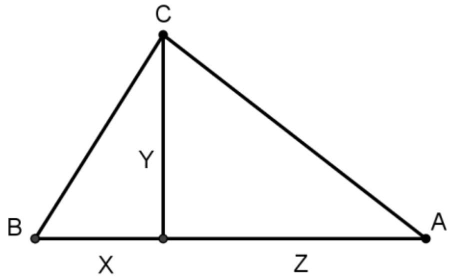


Рис. 13

<u>Ответ</u>: 12.

12.Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

<u>Решение 1.</u> Первое уравнение – уравнение плоскости ABC (рис. 14). Второе – уравнение сферы с центром $O(0;\, 0;\, 0)$ и радиусом $R = 1$.

Пирамида $OABC$ – правильная, $AO = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$. Высота OH к основанию ABC равна 1, следовательно, точка H является точкой касания сферы и плоскости.

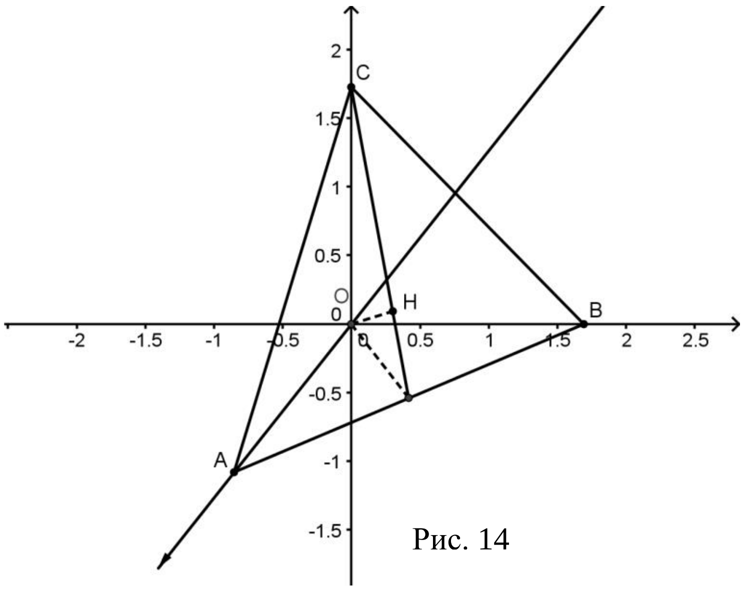


Рис. 14

Координаты $H(x_0, y_0, z_0)$ являются решениями данной системы. Проекции H легко найти, зная что H делит высоту треугольника ABC в отношении 2 : 1 от вершины C.

<u>Решение 2.</u> Можно применить вектор $\overrightarrow{OH}$, коллинеарный вектору $\{1;\, 1;\, 1\}$, тогда $x_0 = k$, $y_0 = k$, $z_0 = k$. Подставив эти координаты в уравнение плоскости, найдем $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 3. Еще способ решения через скалярное произведение. Пусть $\vec{a}(x;y;z)$, $\vec{b}(1;1;1)$. Тогда $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, векторы коллинеарны, их координаты пропорциональны. Значит, $x=y=z=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

13.Найдите наибольшее значение k, при котором имеет хотя бы одно решение система $\begin{cases} x+y+z=k \\ x^2+y^2+z^2-2y\le 2k-2. \end{cases}$

Решение. Неравенство приведем к виду $x^2+(y-1)^2+z^2\le 2k-1$. В координатном пространстве это шар с центром $C(0;\ 1;\ 0)$ и радиусом $R=\sqrt{2k-1}$. Для решения задачи достаточно сравнить расстояние h от центра C до плоскости $x+y+z-k=0$ и радиус шара. Хотя бы одно решение будет при условии $R\ge h$. Расстояние h найдем по формуле расстояния от точки до плоскости, $h=\frac{|1-k|}{\sqrt{3}}$. Получаем неравенство $k^2-8k+4\le 0$, равносильное неравенству $R\ge h$ и имеющее наибольшее решение, равное $4+2\sqrt{3}$.

Ответ: $4+2\sqrt{3}$.

14.Докажите неравенство $\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}$ для положительных чисел a, b, c, для которых оно имеет смысл.

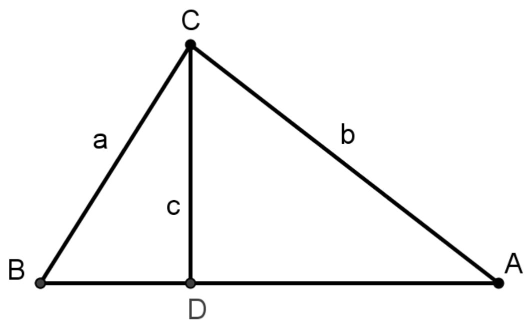


Рис. 15

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники BCD с гипотенузой a и катетом c и ACD с гипотенузой b и катетом c (рис. 15). Получаем треугольник ABC с высотой $CD=c$ и основанием $\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}$. Тогда его площадь равна $\frac{\left(\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\right)\cdot c}{2}$, что не превосходит площади прямоугольного треугольника с катетами a и b, откуда $\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\le\frac{ab}{c}$.

15.Имеет ли решение в положительных числах система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4; \\ y^2 + yz + z^2 = 8; \\ z^2 + zx + x^2 = 36? \end{cases}$$

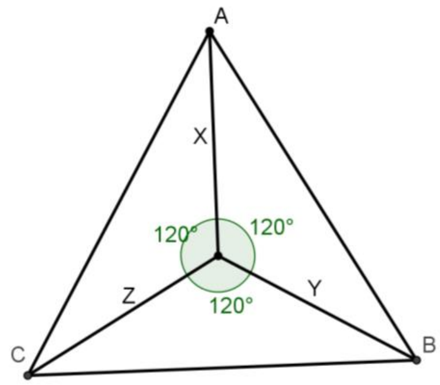


Рис. 16

Решение1. Рассмотрим три треугольника с углами 120° и прилежащими сторонами *x* и *y*, *y* и *z*, *z* и *x* соответственно (рис. 16). Получаем треугольник *ABC* со сторонами 2, $2\sqrt{2}$, 6, что противоречит неравенству треугольника.

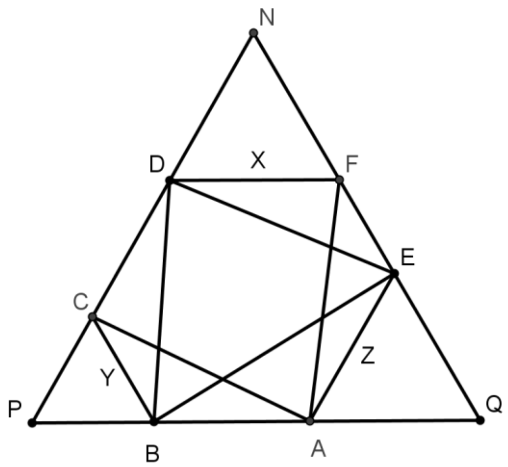


Рис. 17

Решение 2. Построим шестиугольник *ABCDFE* (рис. 17), в котором $AB = x$, $BC = FE = y$, $CD = AE = z$, $\angle ABC = \angle BAE = \angle FEA = \angle BCD = 120°$. Используя равенства системы и применяя теорему косинусов, находим стороны *AC*, *BE*, *BD* и *AF* в треугольниках *ABC*, *BAE*, *BCD* и *AEF*. $AC = 2$, $BE = 6$, $BD = AF = 2\sqrt{2}$. Достроим шестиугольник до равностороннего треугольника *PNQ*, в котором $PN = x + y + z$, $DN = NF = DF = x$. Из равенства треугольников *ABC* и *DFE* следует, что $DE = AC = 2$. Тогда в треугольнике *BDE* оказывается противоречие в виде неравенства $BD + DE < BE$, что означает отсутствие решения системы.

16.Для положительных решений *x, y, z* системы уравнений $\begin{cases} \dfrac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ x^2 + xy + \dfrac{y^2}{3} = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$

определите величину $x\,y + 2\,y\,z + 3\,xz$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и z и гипотенузой 3, треугольник с углом 150°, прилежащими сторонами x и $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и противолежащей стороной 5, треугольник с углом 120°, прилежащими сторонами x и z и противолежащей стороной 4 (рис. 18). Получаем треугольник ABC со сторонами 3, 4 и 5. Искомая величина в $4\sqrt{3}$ раз больше площади треугольника ABC и равна $24\sqrt{3}$.

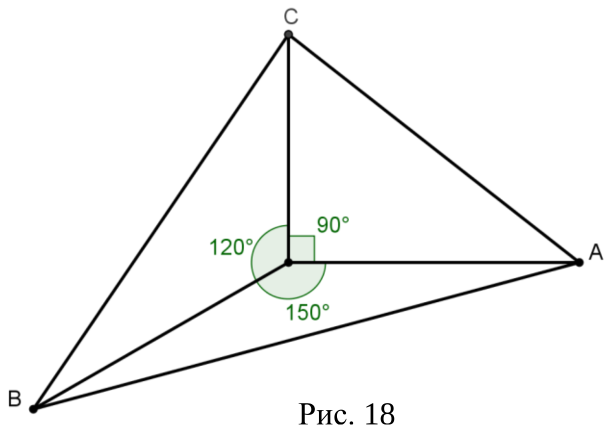


Рис. 18

Ответ: $24\sqrt{3}$.

17. Даны положительные числа a, b, c, d, причем $a > b > c > d$. Докажите, что

$$(a + b + c + d)^2 > a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2.$$

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b + c + d$. Внутри квадрата можно расположить непересекающиеся квадрат со стороной a, три квадрата со стороной b, пять квадратов со стороной c и семь квадратов со стороной d (рис. 19)

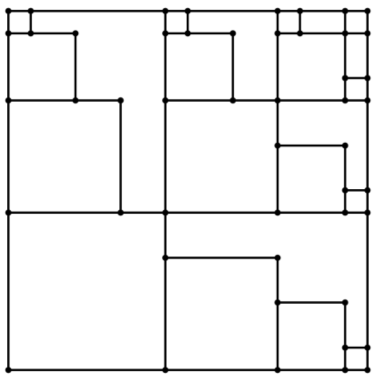


Рис. 19

18. Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1\cdot 199} + \sqrt{2\cdot 198} + \sqrt{3\cdot 197} + \ldots + \sqrt{99\cdot 101} < 2500\pi.$$

Решение. Рассмотрим среднюю часть двойного неравенства. Каждое слагаемое можно интерпретировать как высоту прямоугольного треугольника с гипотенузой 200. Рассмотрим четверть круга радиуса 100 и впишем ступенчатую фигуру из прямоугольников со стороной 1, лежащей на радиусе (рис. 20). Средняя часть – площадь этой фигуры. Она меньше площади четверти круга. Если рассмотреть ступенчатую фигуру, в которую вписана четверть круга, получим, что её площадь на 100 больше предыдущей фигуры, что завершает доказательство.

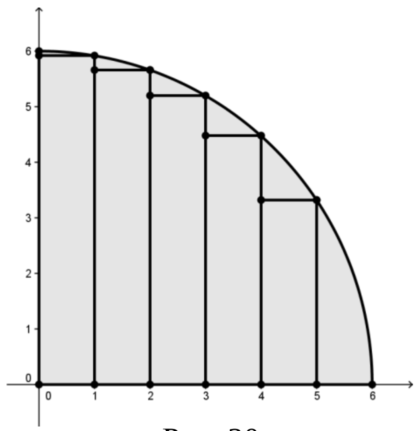


Рис. 20

Литература

1. Блинков, А. Д. Геометрия в негеометрических задачах [Текст] / А.Д. Блинков – М.: МЦНМО, 2016.
2. ЕГЭ 2008. Математика. Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Эксмо, 2008.
3. Единый государственный экзамен: Математика: Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Просвещение, Эксмо, 2005.
4. Задачи [Электронный ресурс] // Проект МЦНМО при участии школы 57 – Режим доступа: http://www.problems.ru/ (09 марта 2018 г.).
5. Курьякова, Т.С. Применение векторно-координатного метода в школьном курсе алгебры [Текст] / Т.С. Курьякова, Н.И. Степанова // Учебное пособие. – Иркутск: Издательство ОАО НПО «Облмашинформ», 2000.