УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0

*Рекомендовано к публикации учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ*

Под общей редакцией З. А. Дулатовой

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XIV Всерос. науч.-практ. конф. Иркутск, 25–27 марта 2021 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2021. – 1 электрон. опт. диск. – Загл. с этикетки диска.
ISBN 978-5-9624-1916-9

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.
Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел. +7(3952) 51-19-00
Издательство ИГУ, 664074, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124
тел. +7(3952) 52-18-53; e-mail: izdat@lawinstitut.ru
Подписано к использованию 16.04.2020. Тираж 30 экз. Объем 8,4 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше

СОДЕРЖАНИЕ

В. Н. Агейчик
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, г. Иркутск
А. Г. Зенцов
Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ПАРАБОЛЫ В ШКОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

На вопрос учащимся старших классов о том, что такое окружность, наиболее вероятным является геометрическое определение. А на вопрос относительно параболы большинство, без преувеличения, укажет на график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$.

На уроках алгебры изучаются только расположения параболы в системе координат (сдвиги и растяжения), а также взаимное расположение параболы относительно других графиков для решения уравнений и систем уравнений, в том числе задач с параметрами.

В 11-м классе предусматривается вычисление с помощью интеграла площадей фигур, ограниченных графиками. В реальности зачастую эта тема пропускается, так как выпускников нужно готовить к сдаче экзаменов, на которых редко встречается интегрирование.

Таким образом, большинство значимых физических и геометрических свойств параболы выпадают из рассмотрения в школе. Можно сказать о существенном пробеле в школьной математике с позиции внутрипредметных связей, прикладной направленности обучения, межпредметных связей с курсами физики и астрономии.

В данной статье мы рассматриваем ряд задач, иллюстрирующих интересные геометрические свойства параболы. На примере этих задач можно увидеть конкретную реализацию внутрипредметных и межпредметных связей.

Геометрическое определение параболы

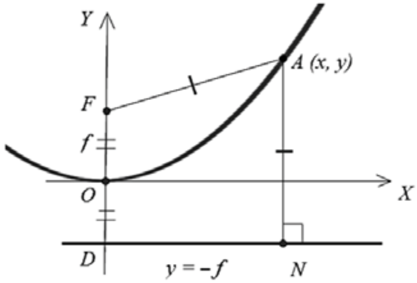
Пара́бола (греч. παραβολή – приложение) – геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от данной прямой (называемой директрисой параболы) и данной точки (называемой фокусом параболы).

F (0, f) – фокус, прямая DN – директриса с уравнением $y = - f$. Равенство $AF = AN$ запишем через координаты:

$$x^2 + (y - f)^2 = (y + f)^2.$$

Выражая y через x, получаем уравнение параболы $y = x^2/(4f)$, или $y = ax^2$, где $a = 1/(4f)$.

Точка O – вершина параболы, прямая OY – ось параболы, ось ее симметрии. Заметим, что ось OX делит отрезок FN пополам.

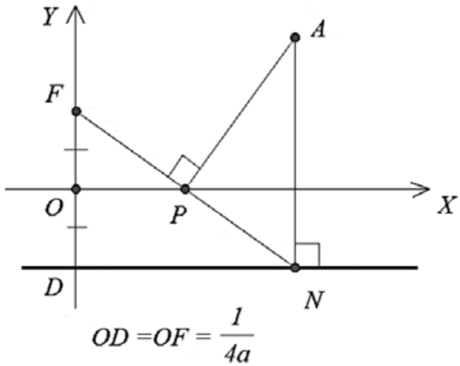


Геометрические свойства параболы

Рассмотрим решение **задачи 1**: докажите, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку A (рис.) и прямая AP касается параболы в точке A.

Из равенства отрезков OF и OD следует, что P – середина FN, $AN = AF$. Точка A равноудалена от F и прямой DN, значит, через нее проходит парабола с вершиной в точке O. По условию $f = 1/(4a)$, тогда $a = 1/(4f)$ и уравнение параболы: $y = ax^2$.

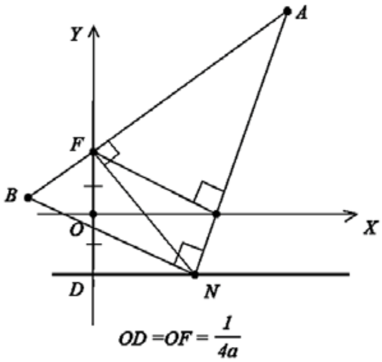
Пусть (x_0, y_0) – координаты точки A, $(x_0/2, y_0)$ – координаты точки P. Тогда $k = 2y_0/x_0 = 2ax_0$, где k – коэффициент уравнения прямой AP. Само уравнение прямой имеет вид: $y = 2ax_0x - y_0$. Дискриминант уравнения $ax^2 = 2ax_0x - y_0$ равен 0, следовательно, прямая AP имеет только одну общую точку с параболой $y = ax^2$, а значит, является касательной. Итак, касательная к параболе в точке с абсциссой x_0 пересекает ось OX в точке $x_0/2$.

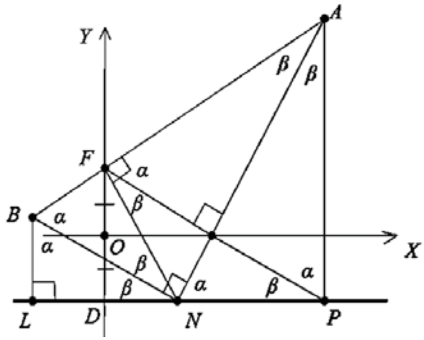


Из рассмотренного решения следует, *что если фокус параболы отразить относительно касательной, то его образ будет лежать на директрисе.*

Задача 2. Докажите, что парабола $y = ax^2$ проходит через точки A и B. (рис., *слева*), а прямые AN и BN касаются параболы в точках A, B.

Решение. Продолжим перпендикуляр из точки F на AN до пересечения с прямой DN в точке P (рис., *справа*). Из равенства $OF = OD$ следует, что AN – серединный перпендикуляр к отрезку FP. Из равенства AF и AP следует, что парабола $y = ax^2$ проходит через точку A. Точки F и P симметричны относительно NA, следовательно, NA – касательная в точке A.



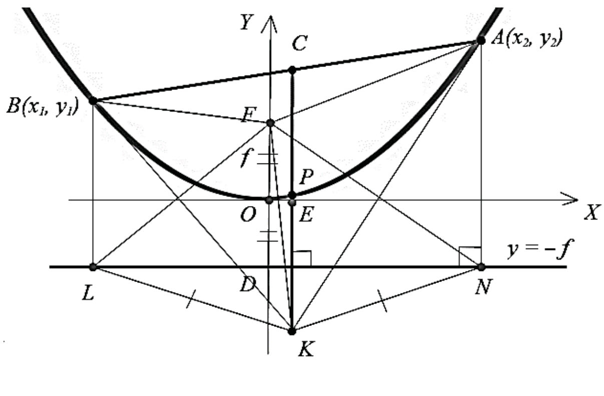


Треугольники *BLN* и *BNF* равны, следовательно, точка *B* равноудалена от фокуса *F* и директрисы *DN*, т. е. парабола $y = ax^2$ проходит через точку *B*. Точки *F* и *L* симметричны относительно *BN*, следовательно, *BN* – касательная в точке *B*.

Итак, *если хорда параболы проходит через ее фокус, то касательные в концах хорды пересекаются под прямым углом и точка пересечения лежит на директрисе параболы*.

Задача 3. Отрезок, соединяющий середину произвольной хорды параболы и точку пересечения касательных к ней в концах этой хорды, перпендикулярен директрисе, а его середина лежит на параболе.

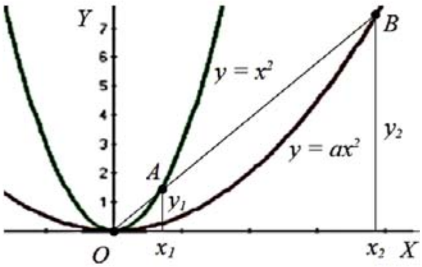
Решение. Выполним дополнительные построения, как показано на рисунке. Прямая *LN* – директриса, *F* – фокус, прямые *KA* и *KB* – касательные к параболе в точках *A* и *B*. Отрезки *KA* и *KB* являются серединными перпендикулярами к отрезкам *FN* и *FL*, следовательно, точка *K* лежит на серединном перпендикуляре *KE* к отрезку *LN* (*K* – центр описанной окружности треугольника *LFN*). Продолжение *KE* пересекает хорду *AB* в точке *C*. Из параллельности *BL, KC* и *AN* следует, что *C* – середина хорды *AB*.



Точка E имеет координаты $((x_1 + x_2)/2, 0)$, точка P лежит на параболе $y = ax^2$, ее координаты: $((x_1 + x_2)/2, a(x_1 + x_2)^2/4)$. Точка C $((x_1 + x_2)/2, (y_1 + y)/2)$. Из равенства $PC = CE - PE$ получим: $PC = a(x_1 - x_2)^2/4$.

В решении задачи 1 составлено уравнение касательной AK: $y = 2ax_2x - y_2$. Подставляя в это уравнение абсциссу точки E, получим ординату точки K или длину KE, равную ax_1x_2. Тогда $KP = KE + EP = a(x_1 - x_2)^2/4$, следовательно, $PC = KP$.

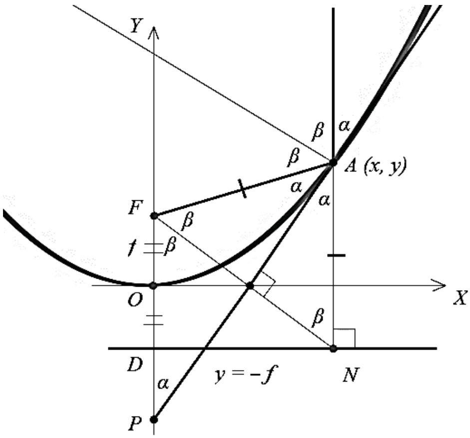
Задача 4. Докажите, что с помощью гомотетии с центром (0; 0) параболу $y = ax^2$ можно перевести в параболу $y = x^2$.



Решение. Уравнение прямой OB: $y = kx$, $k = ax_2^2/x_2 = ax_2$. Из уравнения $kx = x^2$ находим абсциссу точки A: $x_1 = ax_2$, тогда $y_1 = (ax_2)^2$. Итак, $x_1 : x_2 = a$ и $y_1 : y_2 = a$, следовательно, параболы гомотетичны относительно точки O.

Итак, верно следующее свойство парабол: *все параболы подобны. Расстояние между фокусом и директрисой определяет масштаб.*

Приведем геометрическое доказательство **оптического свойства параболы**, которое применяется в различных областях жизнедеятельности цивилизации.



Пучок лучей, параллельных оси параболы, отражаясь от параболы, собирается в ее фокусе. И наоборот, свет от источника, находящегося в фокусе, отражается параболой в пучок параллельных ее оси лучей.

При решении первой задачи мы установили, что касательная к параболе в точке с абсциссой x пересекает ось OX в точке $x/2$. Получаем равенства: $OP = y$, $PF = AN = FA$. Из равенства этих отрезков следуют равные углы (см. рис.). Прямая AN параллельна оси OY.

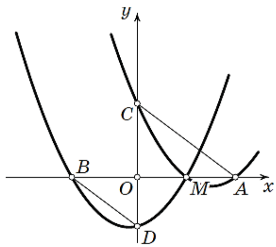
Если представить FA как луч света, падающий на параболу в точке A под углом β к прямой, перпендикулярной к касательной в точке A, то после отражения этот луч направится параллельно оси OY согласно равенству углов падения и отражения. Если луч будет падать на параболу параллельно ее оси, то после отражения он попадет в фокус. Такова геометрия параболических антенн, передающих и принимающих.

Приводим без доказательства еще одно геометрическое свойство параболы: *середины параллельных хорд параболы лежат на одной прямой, параллельной оси параболы*.

Рассмотрим следующий ряд задач с геометрическим содержанием, при решении которых нужны знания не только геометрии. Такие задачи часто используются на различных олимпиадах и турнирах.

1. Парабола $y = x^2 + px + q$ и прямая $y = bx + k$ пересекаются в точках A и B. Найдите абсциссу середины отрезка AB.

Решение. Чтобы найти абсциссы точек пересечения, составим уравнение: $x^2 + (p - b)x + q - k = 0$. По теореме Виета сумма абсцисс равна $b - p$, тогда середина отрезка имеет абсциссу $(b - p)/2$.



2. Даны два приведенных квадратных трехчлена. График одного из них пересекает ось Ox в точках A и M, а ось Oy – в точке C. График другого пересекает ось Ox в точках B и M, а ось Oy – в точке D. (O – начало координат; точки расположены как на рисунке справа.) Докажите, что треугольники AOC и BOD подобны.

Решение. Пусть первый трехчлен $y = x^2 + bx + c$ и его корни x_1 и x_2, а второй $y = x^2 + px + q$ и его корни x_1 и x_3. Тогда $AO = x_2$, $BO = -x_3$, $CO = c$, $DO = - q$. По теореме Виета $x_1x_2 = c$ и $x_1x_3 = q$. Поделив первое равенство на второе, получаем $x_2/x_3 = c/q$. Тогда $AO/CO = x_2/c = x_3/q = BO/DO$, откуда и получаем подобие треугольников AOC и BOD.

3. Докажите, что точки пересечения парабол $y = x^2 + x - 41$ и $x = y^2 + y - 40$ лежат на одной окружности.

Решение. Второе уравнение – уравнение параболы с осью, параллельной Ox: $y = - 0{,}5$ (можно получить выделением полного квадрата). Сложив уравнения, получаем $x^2 + y^2 = 81$. Это уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом 9. Так как общие точки парабол удовлетворяют и сумме уравнений, то они лежат на этой окружности.

4. На плоскости расположены две параболы так, что их оси взаимно перпендикулярны, а сами параболы пересекаются в четырех точках. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной окружности.

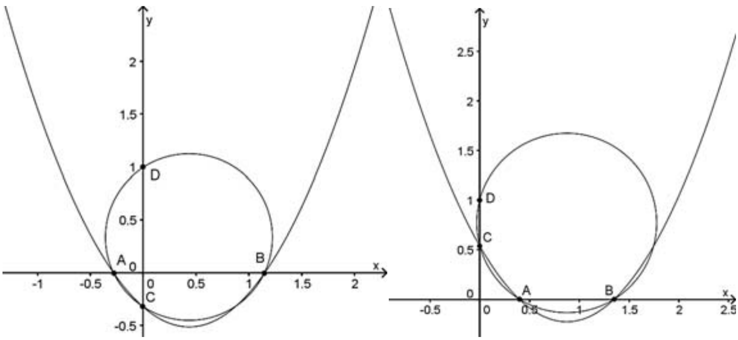
Решение. Эта задача является обобщением предыдущей. Зададим оси координат так, чтобы они содержали оси парабол. Можно изменением масштаба сделать одно из уравнений приведенным. Тогда их уравнения будут $y = x^2 + px + q$ и $x = ay^2 + by + c$. Проделав ту же операцию, что и в предыдущей задаче, предварительно уравняв коэффициенты при x^2 и y^2, получим уравнение окружности, которой и принадлежат все 4 точки пересечения.

5. К параболам, заданным уравнениями $y = x^2 + 4$ и $y = -x^2 + 2x - 1$, проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник, вершинами которого служат точки касания, является параллелограммом.

Решение. Пусть общая касательная имеет вид $y = kx + b$. Используем факт, что касательная с параболой имеет одну общую точку. Уравнения $x^2 + 4 = kx + b$ и $-x^2 + 2x - 1 = kx + b$ имеют по одному корню и, следовательно, нулевой дискриминант. Отсюда $k^2 + 4b - 16 = 0$ и $k^2 - 4b - 4 = 0$. Решая систему, получаем $b = 0$, $k = 4$ и $b = 3$, $k = -2$. Тогда точки касания (2; 8), (2; – 1), (– 1;5), (– 1;4), а соответствующие векторы, задающие две противоположные стороны, имеют одинаковые координаты (0; 9), т. е. задают параллелограмм.

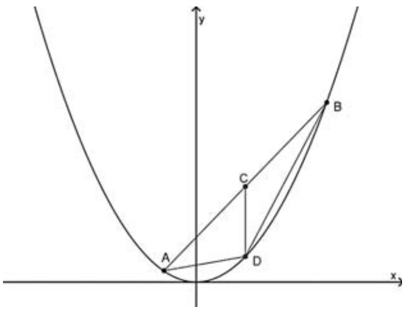
6. Рассмотрим графики функций $y = x^2 + px + q$, которые пересекают оси координат в трех различных точках. Докажите, что все окружности, описанные около треугольников с вершинами в этих точках, имеют общую точку.

Решение. Докажем, что все окружности проходят через точку (1; 0). Пусть ось абсцисс график пересекает в положительной части (см. рис. слева). Тогда произведение длин отрезков $OA \cdot OB = x_1 \cdot x_2 = q = 1 \cdot q = OC \cdot OD$, а значит, точки A, B, C и D лежат на одной окружности. Аналогичная ситуация, когда обе точки пересечения с осью абсцисс лежат в отрицательной части.



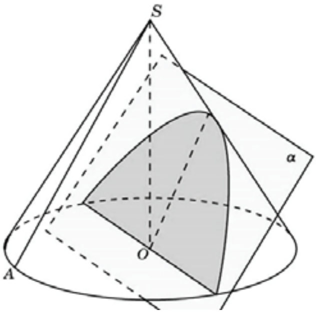
Пусть точки пересечения с осью абсцисс лежат по разные стороны от 0. Тогда $OA \cdot OB = -x_1 \cdot x_2 = -q = 1 \cdot (-q) = OC \cdot OD$, а значит, точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

7. Докажите, что площадь треугольника, основание которого – хорда параболы, а вершина лежит на параболе в точке с абсциссой, равной полусумме абсцисс концов хорды, равна $\frac{3}{4}$ площади фигуры, заключенной между параболой и этой хордой.



Решение. Без ограничения общности (так как все параболы подобны) будем рассматривать параболу, заданную формулой $y = x^2$. Пусть координаты точки $A(x_1; x_1^2)$, $B(x_2; x_2^2)$. Середина отрезка C имеет координаты $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \frac{x_1^2+x_2^2}{2}\right)$, а соответствующая точка D на параболе – $\left(\frac{x_1+x_2}{2}; \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2\right)$.

Тогда $CD = \frac{x_1^2+x_2^2}{2} - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{(x_1-x_2)^2}{4}$. Так как высоты треугольников ACD и BCD, проведенные к CD, равны $\frac{x_2-x_1}{2}$, то площадь ABD равна $\frac{(x_2-x_1)^3}{8}$.



Для вычисления площади сегмента параболы воспользуемся площадью трапеции $S_{тр} = \frac{x_1^2+x_2^2}{2} \cdot (x_2 - x_1)$ и площадью подграфика, которую вычислим с помощью интегрирования: $S_{под} = \int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{x_2^3-x_1^3}{3}$.

Тогда $S_{сегм} = S_{тр} - S_{под} = \frac{(x_2-x_1)^3}{6}$. Очевидно, что $S_{ABD} = \frac{3}{4} S_{сегм}$.

Как еще определяется парабола

Пара́бола – коническое сечение с единичным эксцентриситетом. Плоскость α сечения конуса параллельна образующей конуса, тогда кривая пересечения α с поверхностью конуса – парабола. Доказательство этого вполне доступно учащимся при изучении стереометрии и является ярким примером взаимосвязи планиметрии и стереометрии.

Пара́бола – кривая второго порядка вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, если дискриминант $B^2 - 4AC$ равен нулю. Доказательство этого выходит за рамки школьной математики, но учащимся полезно рассмотреть это на конкретных примерах.

Пара́бола – кривая, задаваемая в полярной системе координат (r; φ) с центром в фокусе и нулевым направлением вдоль оси параболы (от фокуса к вершине) уравнением $r\ (1 + \cos\varphi) = p$, где p – фокальный параметр (расстояние от фокуса до директрисы или удвоенное расстояние от фокуса до вершины).

Полярная система координат находит применение при исследовании траекторий движения тел в гравитационном поле. Параболы являются одним из видов этих траекторий. Заметим, что такие исследования встречаются в работах старшеклассников, представляемых на различных школьных конференциях.

Таким образом, разнообразные определения параболы и доказательства ее свойств не только расширяют кругозор учащихся и позволяют тренировать их в решении нестандартных задач, но и показывают взаимосвязь различных областей математики и других наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А. В., Заславский А. А. Геометрические свойства кривых второго порядка. М. : МЦНМО, 2007. 136 с.
2. Бронштейн И. Парабола // Квант. 1975. № 4. С. 9–16.
3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии : учеб. пособие. 6-е изд., стереотип. М. : МЦНМО, 2007. 640 с.