УДК 51(077)(063)
ББК 22.1р30л0

*Рекомендовано к публикации учебно-методическим советом
Педагогического института ИГУ*

Под общей редакцией З. А. Дулатовой

Математика и проблемы обучения математике в общем и профессиональном образовании : материалы XV Всероссийской научно-практической конференции. Иркутск, 28–30 марта 2022 г. / ФГБОУ ВО «ИГУ» ; под общ. ред. З. А. Дулатовой. – Иркутск : Издательство ИГУ, 2022. – 1 электронный оптический диск (CD-ROM). – Заглавие с этикетки диска.

ISBN 978-5-9624-2050-9

В материалах отражены вопросы особенностей отбора содержания и организации обучения математике в процессе реализации требований ФГОС в общем и профессиональном образовании, внедрения современных методов обучения, организации проектной и исследовательской деятельности обучающихся с применением математики, организации оценки результатов обучения в современных условиях, подготовки учащихся к прохождению итоговых государственных испытаний.

Предназначено для учителей и преподавателей математики, студентов математических профилей вузов.

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Иркутский государственный университет»
664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1; тел. +7(3952) 52-19-00
Издательство ИГУ, 664082, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 124
тел. +7(3952) 52-18-53; e-mail: izdat@lawinstitut.ru
Подписано к использованию 27.05.2022. Тираж 15 экз. Объем 8,49 Мб.

Тип компьютера, процессор, частота:	32-разрядный процессор, 1 ГГц или выше
Оперативная память (RAM):	256 МБ
Необходимо на винчестере:	320 МБ
Операционные системы:	ОС Microsoft® Windows® XP, 7, 8 или 8.1. ОС Mac OS X
Видеосистема:	Разрешение экрана 1024x768
Акустическая система:	Не требуется
Дополнительное оборудование:	Не требуется
Дополнительные программные средства:	Adobe Reader 6 или выше

СОДЕРЖАНИЕ

В. Н. Агейчик
МАОУ Лицей ИГУ г. Иркутска, г. Иркутск
А. Г. Зенцов
Лицей № 36 ОАО «РЖД», г. Иркутск

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ И ПРИМЕРЫ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

Под *инвариантом* понимается свойство совокупности рассматриваемых математических объектов, остающееся неизменным в результате некоторых их преобразований. Концепция инварианта является фундаментальной для математики и связана с важнейшей проблемой классификации объектов. Фактически цель всякой математической классификации состоит в построении полной системы инвариантов. [2]

Немецкий математик Феликс Клейн в конце девятнадцатого века предложил подход к классификации разделов геометрии, основанный на выделении инвариантов, которые определяются группами преобразований пространства.

«Здесь речь идет о тех идеях, которые я систематически развил в моей «Эрлангенской программе» 1872 г. С самого начала наше внимание особенно привлекли следующие четыре вида преобразований, изображаемых некоторыми *специальными линейными подстановками* координат x, y, z: *параллельные переносы, повороты около начала координат O, зеркальное отражение относительно этой же точки O* и *гомотетии с центром O… геометрия является, таким образом, теорией инвариантов упомянутых линейных подстановок»* [1, с. 201–202].

Перечисленные Клейном преобразования включены в программу школьной геометрии. В реальности их изучение носит ознакомительный характер, а термин «инвариант» и вовсе отсутствует в основных учебных пособиях.

В отличие от школьной геометрии, его величество «Инвариант» прочно обосновался в олимпиадной математике.

Рассмотрим несколько примеров применения инварианта для решения олимпиадных задач.

1. Изначально на доске написаны числа 10, 20, 30, 40, 50. Разрешается выбрать любое число, уменьшить его в простое число раз (но так, чтобы оно осталось целым), а одно из других чисел увеличить в другое простое число раз (например, 50 и 20 заменить на $50 : 5 = 10$ и $20 \cdot 7 = 140$). Можно ли получить набор чисел 20, 30, 40, 50, 60 с помощью таких преобразований?

Инвариант – количество простых делителей. Оно не меняется при этих преобразованиях. Но в первоначальном наборе и в получившемся наборе количество простых делителей с учётом их кратности разное: у 10 их два, а у 60 – четыре.

Ответ: нет.

2. На доске выписаны числа 1, 2, 3, …, 100. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них их произведение. Какое число может остаться на доске после 99 таких операций?

Инвариант – произведение всех чисел. Оно не меняется.

Ответ: 100!

3. На шести елках сидят шесть чижей – на каждой елке по чижу. Елки растут в ряд на одинаковом расстоянии. Если какой-то чиж перелетает с одной елки на другую, то какой-то другой чиж перелетает на такое же расстояние в противоположном направлении. Могут ли через некоторое время все чижи собраться на одной елке?

Инвариант – сумма номеров ёлок, на которых сидят чижи. Первоначально сумма равна 21. Если же все чижи соберутся на одной ёлке, то получившаяся сумма номеров будет делиться на 6.

Ответ: не могут.

4. В клетках квадрата 3×3 расставлены числа. Разрешается к числам, стоящим в двух соседних клетках, одновременно прибавлять одно и то же число, не обязательно положительное. Можно ли из квадрата слева в какой-то момент получить такой квадрат с числами, как на рисунке справа?

2	6	2
4	7	3
3	6	5

1	0	0
0	2	0
0	0	1

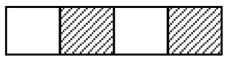
Раскрасим в шахматном порядке. Инвариант – разность сумм чисел на чёрных и белых клетках. Первоначально разность равна 0. В окончательной расстановке – 4.

Ответ: получить правый квадрат нельзя.

5. Клетки доски 9×9 покрашены в шахматном порядке (угловые клетки чёрные). Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые две соседние клетки. а) Можно ли с помощью таких операций перекрасить всю доску в чёрный цвет? б) А в белый?

Ответ: а) да; б) нет.

Решение: б) Инвариант – чётность числа белых клеток.



а) Легко привести пример подходящей раскраски.

В задачах на графы нередко в качестве инварианта используется формула Эйлера для плоских графов: В – Р + Г = 2, где В – количество вершин, Р – количество рёбер, Г – количество граней. В частности, в дереве получаем, что В – Р = 1.

6. В некоторой стране 30 городов, причем каждый соединен с каждым дорогой. Какое наибольшее число дорог можно закрыть на ремонт так, чтобы по оставшимся дорогам из каждого города можно было проехать в каждый?

Удаляем рёбра в графе дорог, пока в графе не останется циклов, но он будет связным. В нём останется 29 рёбер. Первоначально их было 15 × 29 = 435 рёбер. Значит, удалить можно 406 рёбер.

7. Каждая грань кубика разбита на 4 квадрата. Некоторые стороны этих квадратов раскрасили в красный цвет – всего 26 сторон. Докажите, что на поверхности кубика найдется замкнутая ломаная из красных отрезков.

Найдём число вершин в графе $12 + 8 + 6 = 26$. Поэтому при 26 рёбрах обязательно найдётся цикл.

8. Внутри квадрата отмечены 22 точки. Некоторые из них соединены с вершинами квадрата и между собой так, что квадрат разбился на треугольники. При этом все отмеченные точки оказались вершинами этих треугольников. Найдите число треугольников.

Инвариант – сумма углов треугольника. Считаем сумму всех углов. Пусть есть n треугольников. Тогда $180°n = 360°\times22 + 90°\times4$. Отсюда $n = 46$.

Инвариант – формула Эйлера. Получаем 26 вершин, $n + 1$ грань, $(3n – 4)/2 + 4$ рёбер. Тогда $26 – 3n/2 + 2 – 4 + n + 1 = 2$, откуда $n = 46$.

Ответ: 46 треугольников.

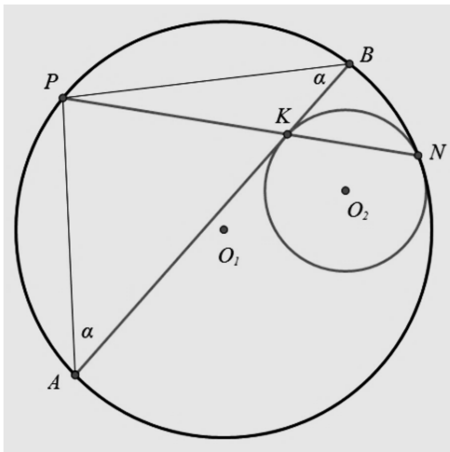
Далее мы приводим примеры решения геометрических задач с применением инвариантов. Ограничимся двумя основными преобразованиями плоскости: движениями и подобием. Инварианты этих преобразований подробно рассмотрены в пособии Я. П. Понарина [3].

«Основными инвариантами движений плоскости являются расстояния между точками, свойства фигур быть прямой, отрезком, лучом, полуплоскостью, углом, отношение «лежать между» для трех точек прямой, параллельность прямых» [3, с. 156–157].

«Основными инвариантами подобий являются свойства фигур быть прямой (коллинеарность точек), отрезком, лучом, полуплоскостью, углом, а также параллельность прямых, величина углов, отношение длин двух отрезков» [3, с. 226].

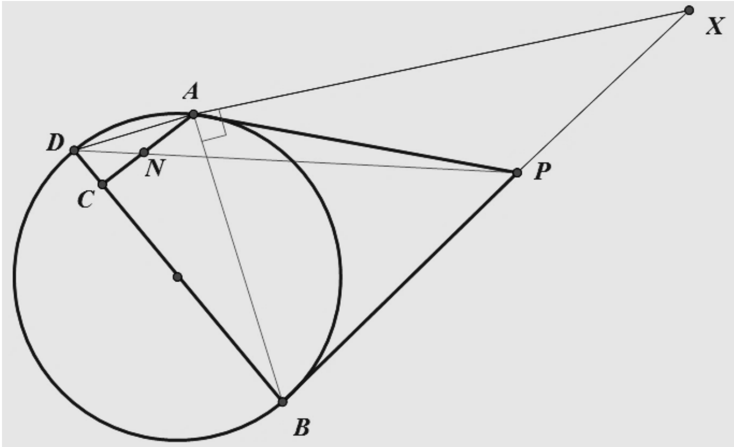
В наших примерах мы делаем акцент на роль инвариантов, как направляющих ориентиров в поиске решений задач. Рассмотрим одну из красивых и древних задач планиметрии:

1. («Книга лемм» Архимеда) Из точки P, взятой вне окружности с центром O, проведены касательные PA и PB (A и B – точки касания). Пусть C – основание перпендикуляра, опущенного из A на диаметр BD. Докажите, что отрезок AC делится прямой PD пополам.



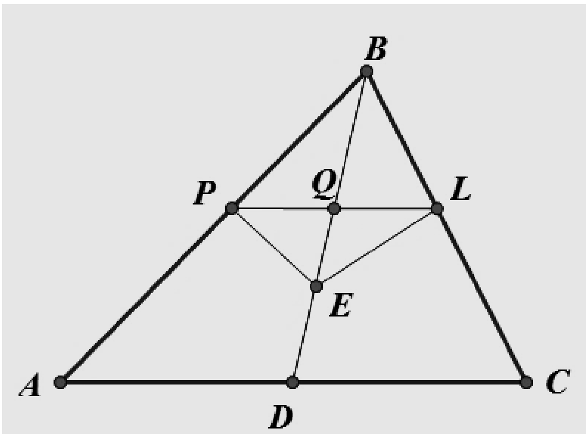
Решение. Зная, что при преобразовании подобия инвариантом являются отношения отрезков, увеличим прямоугольный треугольник ACD до треугольника XBD (см. рис.). Треугольник BAX прямоугольный, точка P делит пополам BX, так как BP = AP. Тогда CN = NA. Очень наглядным будет применение подобия в виде гомотетии для треугольника ACD с центром в точке D, при этом точка N переходит в точку P.

2. ***Лемма Архимеда***. Две окружности касаются внутренним образом в точке N. Хорда AB большей окружности касается меньшей в точке K. Докажите, что прямая NK делит дугу AB, не содержащую точку N, пополам.



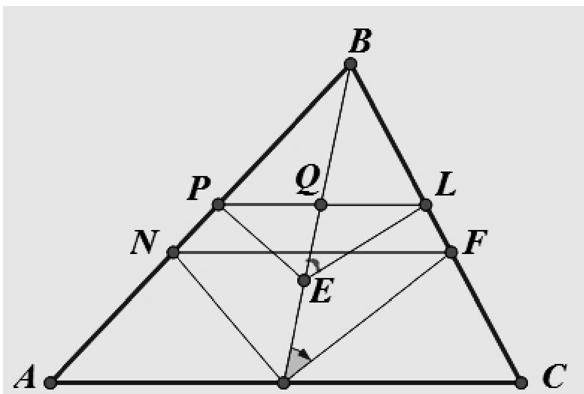
Решение. Будем опираться на утверждение, что дуги окружности, заключенные между двумя параллельными хордами, равны, причем равенство дуг сохраняется, если одна из параллельных хорд займет положение касательной. Инвариантом подобия является параллельность прямых. Большую окружность мы можем рассматривать, как образ при гомотетии с центром в точке N внутренней окружности. Точка K переходит в точку P, образом хорды AB является касательная в точке P, параллельная AB. Тогда дуги AP и PB равны.

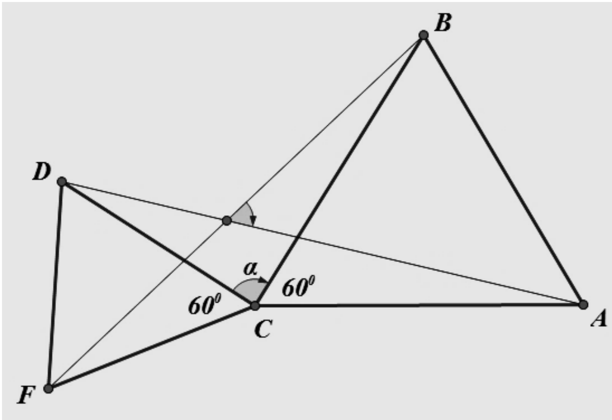
3. Точка *D* – середина стороны *AC* треугольника *ABC.* Постройте треугольник *NFD* с вершинами *N* и *F* на сторонах *AB* и *BC* соответственно так, что *NF* параллельно *AC*, $\angle NDF = 90°$.

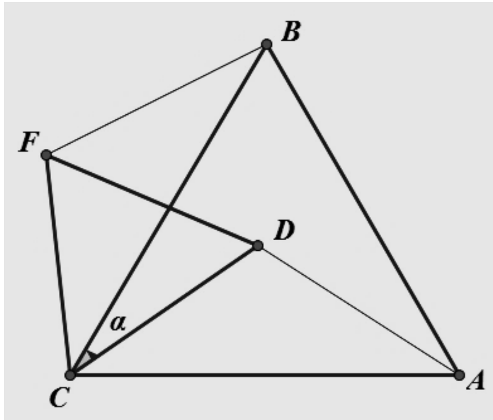


Решение. Для решения воспользуемся таким инвариантом подобия как величина угла. Построим прямоугольный треугольник *PLE* (см. рис.), а затем применим к нему гомотетию с центром в точке *B* так, чтобы точка *E* перешла в точку *D.* При гомотетии величина угла *QEL* сохраняется, следовательно, достаточно провести *DF* параллельно *EL* и *DN* параллельно *EP.* Треугольник *PLE* строим следующим способом: *PL* параллельно *AC,* отрезок *QE* на медиане *BD* равен *PQ* (точка Q делит *PL* пополам). Угол *PEL* прямой в силу того, что медиана *EQ* равна половине *PL*.

4. На плоскости расположены равносторонние треугольники *ABC* и *CDF*. Докажите, что угол между прямыми *AD* и *BF* не зависит от размеров треугольников и от их расположения.



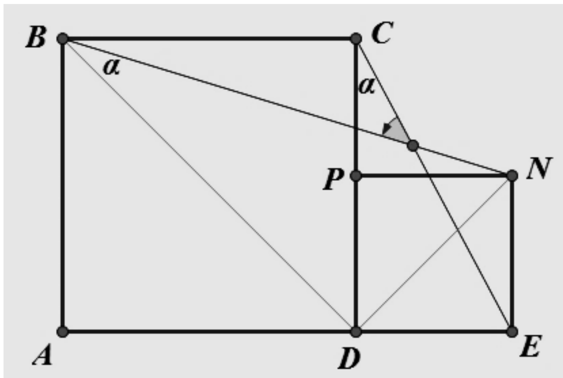




Решение. На двух рисунках показаны расположения треугольников согласно условию задачи. При любом их расположении имеет место равенство треугольников CFB и CDA по двум сторонам и углу между ними ($60° + \alpha$ в первом и $60° - \alpha$ во втором варианте). На основе этого равенства можно треугольник CFB при любых расположениях и размерах рассматривать, как образ треугольника CDA при повороте вокруг точки C на угол 60°. На такой угол поворачиваются все линейные элементы треугольника CDA, в частности AD, переходя в прямую FB.

5. На стороне *CD* квадрата *ABCD* произвольно выбрана точка *P* и построен квадрат *DPNE*. Докажите, что угол между прямыми *BN* и *CE* не зависит от размеров исходного квадрата и положения точки *P* на *CD*.

Решение. При любых размерах квадратов *ABCD* и *DPNE* прямоугольные треугольники *CDE* и *BDN* подобны в силу равенства тангенсов углов *DCE* и *DBN* (см. рис.). Повернем треугольник *DBN* вокруг точки *D* на 45° по часовой стрелке. Полученный треугольник подобен треугольнику *DCE* (*величина угла – инвариант поворота*) и поворотный образ *BN* параллелен *CE* *(инвариант подобия)*, следовательно, угол между *BN* и *CE* равен углу поворота, т. е. 45° при любых размерах квадратов.



Заметим, что решение задачи можно интерпретировать поворотной гомотетией, т. е. композицией поворота и гомотетии (если добавляется преобразование образа треугольника *DBN* в треугольник *CDE)*.

Выразим общую точку зрения, что если применяются преобразования для решения задач, то такие решения являются, как правило, наиболее короткими и «красивыми» из возможных других решений.

Приведенные геометрические примеры показывают, что применение преобразований основано на понимании их инвариантов.

Мы убеждены, что инвариант, играющий важную роль в математике и активно применяемый в олимпиадной математике, должен быть среди основных понятий, изучаемых в школьной математике, включая геометрию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. В 2 т. Т. 2. Геометрия / пер. с нем. под ред. В. Г. Болтянского. 2-е изд. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 416 с.

2. Попов В. Л. Инвариант // Математическая энциклопедия. М. : Сов. энцикл., 1979. Т. 2. С. 526.

3. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. В 2 т. Т. 1. Планиметрия, преобразования плоскости. М. : МЦНМО, 2004. 312 с.

4. Ионин Ю., Курляндчик Л. Поиск инварианта // Квант. 1976 . № 2.