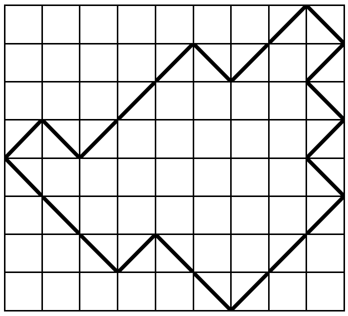
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
БАЙКАЛЬСКОГО МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО ТУРНИРА 2024
Конкурс «Математический фейерверк»

ЗАДАНИЯ 1 ТУРА:
Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2024 год

4 класс

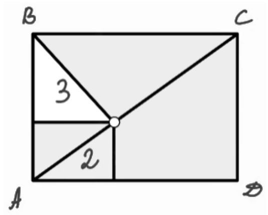
1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 9 так, чтобы разность любых двух соседних была больше трёх? (От большего числа вычитают меньшее). Ответ надо обосновать.
2. Разрежьте фигуру на три равные части. (Части называются равными, если совпадают при наложении, их можно поворачивать и переворачивать).



3. На волшебном дереве растут фрукты. Всё лето в солнечный день на нём вырастает на один фрукт больше, чем в предыдущий день. В пасмурный – на один фрукт меньше, чем в предыдущий день. Фрукты вырастают каждый день. За девять дней на этом дереве выросло 13 волшебных фруктов. Какая погода была на десятый день? Ответ надо обосновать.
4. Сколько решений имеет ребус: Б + Е + Л + К + А = 15, если гласные имеют одну чётность, а согласные – другую? (Разные буквы – разные цифры). Ответ надо обосновать.

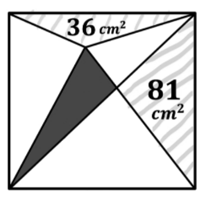
5 класс

1. Внутри квадрата 10 × 10 отмечены 51 точка. Всегда ли можно соединить их отрезками, параллельными сторонам квадрата, чтобы суммарная длина всех отрезков не превосходила 110? Ответ надо обосновать.
2. Капитан Флинт, Джон Сильвер, Билли Бонс и Слепой Пью выпили бочку рома. При этом Сильвер выпил половину того, что выпил Бонс, Флинт – половину того, что не выпил Бонс. После всего этого Пью осталась десятая часть бочки. Какую часть бочки выпил Флинт? Ответ надо обосновать.
3. Арсений написал на доске несколько натуральных чисел так, что их сумма равна 100. Оказалось, что из этих слагаемых нельзя выбрать одно или несколько чисел так, чтобы их сумма была равна четырём (сумма из одного числа равна этому числу). Какое наибольшее число слагаемых мог выписать на доску Арсений? Ответ надо обосновать.
4. Площади прямоугольных треугольников на рисунке равны 3 и 2 (AC – диагональ прямоугольника $ABCD$). Найдите площадь прямоугольника $ABCD$. Ответ надо обосновать.



6 класс

1. Внутри квадрата 10 × 10 отмечены 51 точка. Всегда ли можно соединить их отрезками, параллельными сторонам квадрата, чтобы суммарная длина всех отрезков не превосходила 110? Ответ надо обосновать.
2. Капитан Флинт, Джон Сильвер, Билли Бонс и Слепой Пью выпили бочку рома. При этом Сильвер выпил половину того, что выпил Бонс, Флинт – половину того, что не выпил Бонс. После всего этого Пью осталась десятая часть бочки. Какую часть бочки выпил Флинт? Ответ надо обосновать.
3. Арсений написал на доске несколько натуральных чисел так, что их сумма равна 100. Оказалось, что из этих слагаемых нельзя выбрать одно или несколько чисел так, чтобы их сумма была равна четырём (сумма из одного числа равна этому числу). Какое наибольшее число слагаемых мог выписать на доску Арсений? Ответ надо обосновать.
4. Прямоугольник разрезан на несколько треугольников. Площади двух треугольников даны на рисунке. Найдите площадь закрашенного треугольника. Ответ надо обосновать.



7 класс

1. Турист едет на велосипеде с постоянной скоростью вдоль железной дороги, и иногда мимо него проезжают электрички. Турист заметил, что электрички, едущие в том же направлении, что и он сам, проходят мимо него с интервалом в час, а электрички, едущие навстречу, проходят с интервалом в полчаса. Определите, с каким интервалом электрички отправляются с конечных станций, если известно, что он всегда один и тот же, а скорость электричек постоянна и одинакова. Ответ надо обосновать.
2. Найдите все такие простые числа p и q, что число $p^q - pq$ тоже простое. Ответ надо обосновать.
3. Внутри треугольника ABC отмечена точка O, прямая BO пересекает сторону AC в точке D. Оказалось, что $\angle CBD = 2\angle ABD$, $\angle AOD = \angle COD$, $\angle BAO = 52°$ и $\angle BCO = 37°$. Чему равен угол COD? Ответ надо обосновать.
4. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×3 можно вырезать из прямоугольника 10×9 клеток так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2×2? Ответ надо обосновать.

8 класс

1. Турист едет на велосипеде с постоянной скоростью вдоль железной дороги, и иногда мимо него проезжают электрички. Турист заметил, что электрички, едущие в том же направлении, что и он сам, проходят мимо него с интервалом в час, а электрички, едущие навстречу, проходят с интервалом в полчаса. Определите, с каким интервалом электрички отправляются с конечных станций, если известно, что он всегда один и тот же, а скорость электричек постоянна и одинакова. Ответ надо обосновать.
2. Найдите все такие простые числа p и q, что число $p^q - pq$ тоже простое. Ответ надо обосновать.
3. В прямоугольном треугольнике ABC точка D – середина гипотенузы AC. Точка E делит AB в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Найдите ED, если $CE = 12$. Ответ надо обосновать.
4. Какое наименьшее количество прямоугольников 1×3 можно вырезать из прямоугольника 10×9 так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2×2? Ответ надо обосновать.

РЕШЕНИЯ:

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2024 год

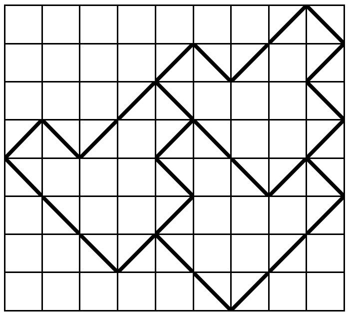
4 класс

1. Можно ли расставить по кругу числа от 1 до 9 так, чтобы разность любых двух соседних была больше трёх? (От большего числа вычитают меньшее). Ответ надо обосновать.

Ответ: можно.

Решение. 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, 5, 1. Пример единственный с точностью до поворота.

Критерии. Верный пример – 7 баллов.



2. Разрежьте фигуру на три равные части. (Части называются равными, если совпадают при наложении, их можно поворачивать и переворачивать).

Решение. Пример на рисунке.

Критерии. Верный пример – 7 баллов.

3. На волшебном дереве растут фрукты. Всё лето в солнечный день на нём вырастает на один фрукт больше, чем в предыдущий день. В пасмурный – на один фрукт меньше, чем в предыдущий день. Фрукты вырастают каждый день. За девять дней на этом дереве выросло 13 волшебных фруктов. Какая погода была на десятый день? Ответ надо обосновать.

Ответ: десятый день был солнечным.

Решение. За два последовательных дня могло вырасти не менее, чем $1 + 2 = 3$ фрукта. Значит, за восемь дней выросло хотя бы $8 : 2 \cdot 3 = 12$ фруктов. Тогда в девятый день мог вырасти только один. В десятый день не могло быть меньше, поэтому должно быть больше. А значит, погода должна быть хорошей.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Любое количество примеров – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

4. Сколько решений имеет ребус: Б + Е + Л + К + А = 15, если гласные имеют одну чётность, а согласные – другую? (Разные буквы – разные цифры). Ответ надо обосновать.

Ответ: 60.

Решение. Имеем две гласных и три согласных и нечётную сумму. Это означает, что согласные – нечётные цифры, гласные – чётные. Пусть Б, Л, К = 1, 3, 5. В этом случае сумма уже равна 9, а две гласных (различные чётные цифры) в сумме должны давать 6. Это возможно в четырёх случаях: если одна цифра 6, а другая – 0 (и наоборот), либо одна цифра 2, а другая – 4 (и наоборот). Для каждого из этих четырёх вариантов, существует шесть перестановок из цифр 1, 3, 5. Итого, с такими согласными $6 \cdot 4 = 24$ варианта.

Пусть Б, Л, К = 1, 3, 7. Тогда сумма равна 11, на гласные остаётся в сумме 4, тогда Е = 4, А = 0, либо наоборот. Получаем $2 \cdot 6 = 12$ вариантов.

Пусть Б, Л, К = 1, 3, 9 или 1, 5, 7. Тогда сумма равна 13, на гласные остаётся в сумме 2, тогда Е = 2, А = 0, либо наоборот. Тогда в каждом из этих случаев получается по $2 \cdot 6 = 12$ вариантов. В сумме ещё 24 варианта.

Если же брать 1, 5, 9 или 1, 7, 9 или 3, 5, 7 или 3, 5, 9 то сумма получается не меньше 15. Но в таком случае, учитывая, что гласные различны, получим сумму всех цифр большую 15. Таким образом, имеем $24 + 12 + 24 = 60$ вариантов.

Критерии. Только ответ – 1 балл. При потере подходящих случаев – не более 3 баллов. Если не рассмотрены неподходящие случаи – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2024 год
5 класс

1. Внутри квадрата 10×10 отмечены 51 точка. Всегда ли можно соединить их отрезками, параллельными сторонам квадрата, чтобы суммарная длина всех отрезков не превосходила 110? Ответ надо обосновать.

Ответ: всегда.

Решение. Проведём на расстоянии 1, 3, 5, 7 и 9 от левого края квадрата вертикальные отрезки суммарной длиной 50. Выберем теперь произвольную из отмеченных точек и проведём через неё горизонтальный отрезок длины 10. Каждую из оставшихся точек соединим горизонтальным отрезком с ближайшей вертикальной дорожкой. Заметим, что этот отрезок будет иметь длину не более 1, так как мы квадрат поделили на внутренние полосы ширины 2 граничные ширины 1. Итого, будет использовано не более $50 + 10 + 50 \cdot 1 = 110$, что подходит под условие.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Любой верный пример – 7 баллов.

2. Капитан Флинт, Джон Сильвер, Билли Бонс и Слепой Пью выпили бочку рома. При этом Сильвер выпил половину того, что выпил Бонс, Флинт – половину того, что не выпил Бонс. После всего этого Пью осталась десятая часть бочки. Какую часть бочки выпил Флинт? Ответ надо обосновать.

Ответ: 3/10.

Решение. Флинт и Сильвер на двоих выпили ровно половину бочонка. Значит, Бонс выпил $1 - 1/2 - 1/10 = 2/5$ бочонка, откуда следует, что Флинт выпил 3/10.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

3. Арсений написал на доске несколько натуральных чисел так, что их сумма равна 100. Оказалось, что из этих слагаемых нельзя выбрать одно или несколько чисел так, чтобы их сумма была равна четырём (сумма из одного числа равна этому числу). Какое наибольшее число слагаемых мог выписать на доску Арсений? Ответ надо обосновать.

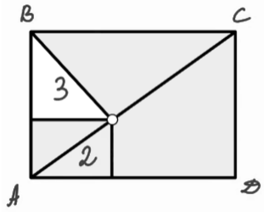
Ответ: 33 числа.

Решение. Оценка. Очевидно, что в сумме нет четвёрок. Предположим, в ней есть единица. Тогда в ней нет троек, и либо не более трёх единиц, либо не более одной единицы и одной двойки. Все остальные слагаемые равны хотя бы 5. Тогда слагаемых уже максимум 22 (если 23, то чисел, больших четырёх, уже хотя бы 20, и их сумма больше 100). Далее считаем, что единиц нет. Пусть есть одна двойка. Тогда слагаемых, равных хотя бы 3, не более 32, а всего их не более 33. Если двоек нет, то все числа равны хотя бы 3, значит, слагаемых не более 33, это не больше, чем в предыдущем случае.

Пример. $2 + 5 + 3 + ... + 3 = 100$.

Критерии. Правильный ответ – 1 балл. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

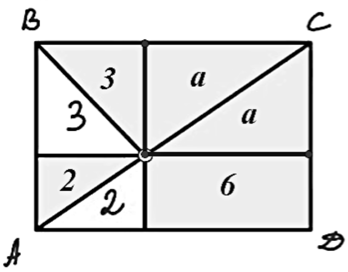
4. Площади прямоугольных треугольников на рисунке равны 3 и 2 (AC – диагональ прямоугольника $ABCD$). Найдите площадь прямоугольника $ABCD$. Ответ надо обосновать.

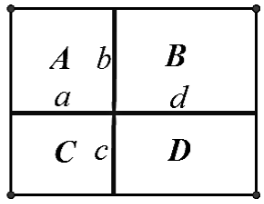


Ответ: 25.

Решение. Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Получаем два треугольника с площадью 3 и два треугольника с площадью 2. Площадь прямоугольника A равна 6, площадь прямоугольника C равна 4. Обозначим площади двух треугольников a, тогда половина площади большого прямоугольника $2 + 6 + a$, а, значит, площадь прямоугольника D равна 6. $AD = CB$, откуда $C = 9$. Тогда $A + B + C + D = 25$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.





AD = CB

$$36 = 8a, \quad a = \frac{9}{2} \qquad S = 25$$

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2024 год
6 класс

1. Внутри квадрата 10 × 10 отмечены 51 точка. Всегда ли можно соединить их отрезками, параллельными сторонам квадрата, чтобы суммарная длина всех отрезков не превосходила 110? Ответ надо обосновать.

Ответ: всегда.
Решение. Проведём на расстоянии 1, 3, 5, 7 и 9 от левого края квадрата вертикальные отрезки суммарной длиной 50. Выберем теперь произвольную из отмеченных точек и проведём через неё горизонтальный отрезок длины 10. Каждую из оставшихся точек соединим горизонтальным отрезком с ближайшей вертикальной дорожкой. Заметим, что этот отрезок будет иметь длину не более 1, так как мы квадрат поделили на внутренние полосы ширины 2 граничные ширины 1. Итого, будет использовано не более 50 + 10 + 50 · 1 = 110, что подходит под условие.
Критерии. Только ответ – 0 баллов. Любой верный пример – 7 баллов.

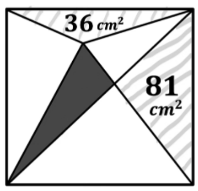
2. Капитан Флинт, Джон Сильвер, Билли Бонс и Слепой Пью выпили бочку рома. При этом Сильвер выпил половину того, что выпил Бонс, Флинт – половину того, что не выпил Бонс. После всего этого Пью осталась десятая часть бочки. Какую часть бочки выпил Флинт? Ответ надо обосновать.

Ответ: 3/10.
Решение. Флинт и Сильвер на двоих выпили ровно половину бочонка. Значит, Бонс выпил 1 − 1/2 − 1/10 = 2/5 бочонка, откуда следует, что Флинт выпил 3/10.
Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

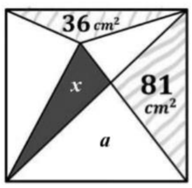
3. Арсений написал на доске несколько натуральных чисел так, что их сумма равна 100. Оказалось, что из этих слагаемых нельзя выбрать одно или несколько чисел так, чтобы их сумма была равна четырём (сумма из одного числа равна этому числу). Какое наибольшее число слагаемых мог выписать на доску Арсений? Ответ надо обосновать.

Ответ: 33 числа.
Решение. *Оценка.* Очевидно, что в сумме нет четвёрок. Предположим, в ней есть единица. Тогда в ней нет троек, и либо не более трёх единиц, либо не более одной единицы и одной двойки. Все остальные слагаемые равны хотя бы 5. Тогда слагаемых уже максимум 22 (если 23, то чисел, больших четырёх, уже хотя бы 20, и их сумма больше 100). Далее считаем, что единиц нет. Пусть есть одна двойка. Тогда слагаемых, равных хотя бы 3, не более 32, а всего их не более 33. Если двоек нет, то все числа равны хотя бы 3, значит, слагаемых не более 33, это не больше, чем в предыдущем случае.
Пример. 2 + 5 + 3 + ... + 3 = 100.
Критерии. Правильный ответ – 1 балл. Оценка – 3 балла. Пример – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

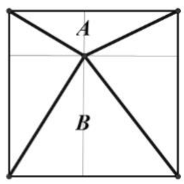
4. Прямоугольник разрезан на несколько треугольников. Площади двух треугольников даны на рисунке. Найдите площадь закрашенного треугольника. Ответ надо обосновать.



Ответ: 45.
Решение. Площади треугольников A и B составляет половину площади прямоугольника. Диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника. Тогда a + 81 = 36 + x + a. Отсюда x = 45.
Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.



$a + 81 = 36 + x + a$
$x = 45$



$A + B = \frac{1}{2}S$

5. Турист едет на велосипеде с постоянной скоростью вдоль железной дороги, и иногда мимо него проезжают электрички. Турист заметил, что электрички, едущие в том же направлении, что и он сам, проходят мимо него с интервалом в час, а электрички, едущие навстречу, проходят с интервалом в полчаса. Определите, с каким интервалом электрички отправляются с конечных станций, если известно, что он всегда один и тот же, а скорость электричек постоянна и одинакова. Ответ надо обосновать.

Ответ: 40 минут.

Решение. Пусть скорость туриста a, скорость электричек b, а интервал движения электричек t. Тогда расстояние между следующими друг за другом электричками равно bt, и при сближении со скоростью $a + b$ это расстояние проходится за 30 минут, а при догоне – со скоростью $b - a$ за 60 минут. Итого, имеем систему

$$\begin{cases} 30(a+b) = bt, \\ 60(b-a) = bt, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60(a+b) = 2bt, \\ 60(b-a) = bt, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120b = 3bt, \\ 60(b-a) = bt. \end{cases}$$

Из 1-го уравнения имеем $t = 40$, то есть электрички ходят с интервалом в 40 минут.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Составлено система уравнений – 1 балл. Баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

6. Найдите все такие простые числа p и q, что число $p^q - pq$ тоже простое. Ответ надо обосновать.

Ответ: (2; 3) и (3; 2).

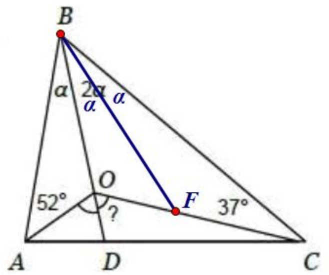
Решение. Очевидно, что $p^q - pq$ делится на p, однако по условию является простым числом, поэтому $p^q - pq = p$, а значит, $p^{q-1} - q = 1$, откуда следует, что p и q имеют разную чётность. Тогда одно из них равно 2, так как является ещё и простым. Дальше разберём два случая:

а) $q = 2$. Тогда $p^{2-1} - 2 = 1$, откуда $p = 3$.

б) $p = 2$. Тогда $2^{q-1} = 1 + q$. Если $q > 3$, то левая часть равенства больше правой, поэтому подойдёт только $q = 3$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Найдено 1 решение (1 из 2 случаев) – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

7. Внутри треугольника *ABC* отмечена точка *O*, прямая *BO* пересекает сторону *AC* в точке *D*. Оказалось, что $\angle CBD = 2\angle ABD$, $\angle AOD = \angle COD$, $\angle BAO = 52°$ и $\angle BCO = 37°$. Чему равен угол *COD*? Ответ надо обосновать.



Ответ: 67°.

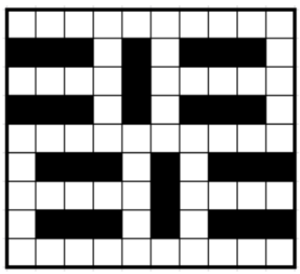
Решение. Пусть $\angle ABD = \alpha$. Проводим биссектрису угла *CBD*. Пусть она пересекается с отрезком *CO* в точке *F*. $\angle BOA = \angle BOF$, тогда треугольники *AOB* и *FOB* равны по общей стороне и двум прилежащим углам. Тогда $\angle BFO = 52°$ – внешний угол треугольника *BFC*, $\alpha = 52° - 37° = 15°$. Тогда $\angle COD$ – внешний угол треугольника *BOC*, $\angle COD = 2\alpha + 37° = 67°$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Идея проведения биссектрисы – 1 балл. Эти баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

8. Какое наименьшее количество прямоугольников 1 × 3 можно вырезать из прямоугольника 10 × 9 клеток так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2 × 2? Ответ надо обосновать.

Ответ: 10 прямоугольников.

Решение. *Оценка.* Из доски 10 × 8 (оставив одну полоску незадействованной) можно вырезать 20 квадратов 2 × 2. При этом любой прямоугольник из трёх клеток будет задевать максимум два из них. Значит, если прямоугольников будет не более 9, то задетых квадратов будет не более 18, значит, будет хотя бы два незадетых квадрата, которые можно будет вырезать. *Пример.* На рисунке.



Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Оценка – 3 балла, пример – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

9. Турист едет на велосипеде с постоянной скоростью вдоль железной дороги, и иногда мимо него проезжают электрички. Турист заметил, что электрички, едущие в том же направлении, что и он сам, проходят мимо него с интервалом в час, а электрички, едущие навстречу, проходят с интервалом в полчаса. Определите, с каким интервалом электрички отправляются с конечных станций, если известно, что он всегда один и тот же, а скорость электричек постоянна и одинакова. Ответ надо обосновать.

<u>Ответ:</u> 40 минут.

<u>Решение.</u> Пусть скорость туриста a, скорость электричек b, а интервал движения электричек t. Тогда расстояние между следующими друг за другом электричками равно bt, и при сближении со скоростью $a + b$ это расстояние проходится за 30 минут, а при догоне – со скоростью $b - a$ за 60 минут. Итого, имеем систему

$$\begin{cases} 30(a+b) = bt, \\ 60(b-a) = bt, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 60(a+b) = 2bt, \\ 60(b-a) = bt, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 120b = 3bt, \\ 60(b-a) = bt. \end{cases}$$

Из 1-го уравнения имеем $t = 40$, то есть электрички ходят с интервалом в 40 минут.

<u>Критерии.</u> Только правильный ответ – 1 балл. Составлено система уравнений – 1 балл. Баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

10. Найдите все такие простые числа p и q, что число $p^q - pq$ тоже простое. Ответ надо обосновать.

<u>Ответ:</u> (2; 3) и (3; 2).

<u>Решение.</u> Очевидно, что $p^q - pq$ делится на p, однако по условию является простым числом, поэтому $p^q - pq = p$, а значит, $p^{q-1} - q = 1$, откуда следует, что p и q имеют разную чётность. Тогда одно из них равно 2, так как является ещё и простым. Дальше разберём два случая:

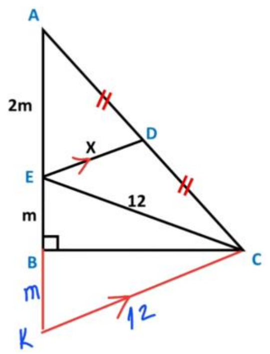
а) $q = 2$. Тогда $p^{2-1} - 2 = 1$, откуда $p = 3$.

б) $p = 2$. Тогда $2^{q-1} = 1 + q$. Если $q > 3$, то левая часть равенства больше правой, поэтому подойдёт только $q = 3$.

<u>Критерии.</u> Только ответ – 1 балл. Найдено 1 решение (1 из 2 случаев) – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. В прямоугольном треугольнике ABC точка D – середина гипотенузы AC. Точка E делит AB в отношении 2 : 1, считая от вершины A. Найдите ED, если $CE = 12$. Ответ надо обосновать.

<u>Ответ:</u> 6.

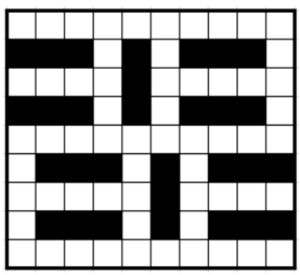


<u>Решение.</u> Пусть $BE = m$. Продлим AB за точку B на расстояние $BK = m$. Тогда E – середина AK, следовательно, ED – средняя линия треугольника KAC, KC и ED параллельны, $ED = 1/2KC$. Треугольники BEC и BKC равны по двум катетам. Тогда $KC = CE = 12$, $ED = 6$.

<u>Критерии.</u> Только ответ – 1 балл. Идея дополнительного построения – 1 балл. Эти баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

11. Какое наименьшее количество прямоугольников 1 × 3 можно вырезать из прямоугольника 10 × 9 клеток так, чтобы больше нельзя было вырезать ни одного квадрата 2 × 2? Ответ надо обосновать.

<u>Ответ:</u> 10 прямоугольников.



<u>Решение.</u> <u>*Оценка.*</u> Из доски 10 × 8 (оставив одну полоску незадействованной) можно вырезать 20 квадратов 2 × 2. При этом любой прямоугольник из трёх клеток будет задевать максимум два из них. Значит, если прямоугольников будет не более 9, то задетых квадратов будет не более 18, значит, будет хотя бы два незадетых квадрата, которые можно будет вырезать. <u>*Пример.*</u> На рисунке.

<u>Критерии.</u> Только правильный ответ – 1 балл. Оценка – 3 балла, пример – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

ЗАДАНИЯ 2 ТУРА:
Математический экспресс 2024

4 класс

Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

1 тур, 10 минут
Задача 1. Фрекен Бок испекла 20 плюшек. Из них в 12 плюшек она положила творог, а в 10 плюшек – варенье. При этом 5 плюшек оказались одновременно и с творогом, и с вареньем. Сколько плюшек оказались пустыми?
Ответ:

Задача 2. Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 11310191. Как её зовут?
Ответ:

Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

2 тур, 10 минут
Задача 3. В комнате стоят трёхногие и пятиногие табуретки. Вася посчитал, что табуреток всего 8, а ножек у них вместе 30. Сколько трёхногих табуреток стоит в комнате?
Ответ:

Задача 4. На игральном кубике отмечены точками числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, причём общее число точек на любых двух противоположных гранях равно 7. Мила склеила столбик из 6 таких кубиков и подсчитала общее число точек на всех наружных гранях. Какое самое большое число она могла получить?

Ответ:

Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

3 тур, 15 минут
Задача 5. На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как восемь белых облетели, а два жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?
Ответ:

Задача 6. Мудрая сова решила составить энциклопедию. Сначала в её энциклопедии было 366 слов. Сова решила ещё раз подсчитать количество слов, но как только сова отсчитывала четыре слова, она тут же вспоминала ещё одно и дописывала его в конец. Сколько слов насчитает сова в своей энциклопедии, когда дойдёт до конца списка?
Ответ:

Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

4 тур, 15 минут
Задача 7. Бабушка пообещала Васе, что накормит его на обед блинами. Один блин Вася ест за минуту, а бабушка выпекает за две минуты (по одному блину за раз). Вася хочет съесть подряд 10 блинов без перерыва. За какое наименьшее время (в минутах) до обеда должна начать печь блины бабушка? Бабушка всё ещё может печь блины, пока Вася ест.
Ответ:

Задача 8. Для нумерации энциклопедии понадобилось 2022 цифры. Сколько страниц было в энциклопедии?
Ответ:
Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

5 тур, 20 минут
Задача 9. Подставьте на место разных букв разные цифры, а на место одинаковых – одинаковые, чтобы получилось верное равенство: НЯ × НЯ = ОЛЯ. Найдите все варианты.
Ответ:

Задача 10. В одном из узлов тетрадного листа живёт книжный червячок. Однажды он решил погулять по листу, выполз из своего узла и после каждой минуты прогулки стал поворачивать налево или направо. За первую минуту червячок прополз одну клетку, за вторую – две, ..., за седьмую минуту – семь клеток. На каком наименьшем расстоянии от домика (в клетках) он мог оказаться в конце седьмой минуты?
Ответ:

Класс_4_____ Ф.И.____Школа__________________

6 тур, 20 минут
Задача 11. Замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными, чтобы получилось верное равенство: КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА. Найдите все варианты
Ответ:

Задача 12. Медвежонок Миша каждый день съедает столько булочек, какое сегодня число месяца. Со своего дня рождения и до конца месяца (включительно) Миша съел 216 булочек. Когда у Миши день рождения?
Ответ:

5-6 класс

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа__________________

1 тур, 10 минут
Задача 1. Колобок убегал от бабки, деда, волка, зайца, медведя и лисы. Между каждым персонажем было 10 км. От бабки колобок убежал со скоростью 10 км/час. После каждой встречи он увеличивал скорость еще на 5 км/час. За какое время он доберется до лисы?
Ответ:

Задача 2. Сколько семизначных чисел, кратных 11, имеют в своей записи только цифры 0 и 1?
Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа__________________

2 тур, 10 минут
Задача 3. Произведение трёх простых чисел равно их сумме, умноженной на 11. Найдите все такие тройки чисел с точностью до перестановки и запишите эти тройки чисел в порядке возрастания.
Ответ:

Задача 4. В трех кассах было в сумме 2016 билетов. В первые три дня первая касса продала соответственно 1/4, 1/5, 1/27 часть своих билетов, вторая касса – 1/5, 1/4, 1/57 часть своих билетов, а третья – 1/7, 1/6, 1/16 своих билетов. Сколько билетов было продано за эти три дня в этих трех кассах вместе?
Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа__________________

3 тур, 15 минут
Задача 5. На доске написано 1000 чисел. Первое число равно 2024, а каждое следующее равно сумме квадратов цифр предыдущего (например, второе число равно $2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = 24$). Найдите сумму всех написанных чисел.
Ответ:

Задача 6. Сколько трехзначных чисел не делятся ни на 3, ни на 4, ни на 5?
Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа__________________

4 тур, 15 минут

Задача 7. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а его сыну для этого требуется 2 часа. За какое время они вымоют трёх слонов, работая вдвоём?

Ответ:

Задача 8. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа___________________

4 тур, 15 минут

Задача 7. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а его сыну для этого требуется 2 часа. За какое время они вымоют трёх слонов, работая вдвоём?

Ответ:

Задача 8. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?

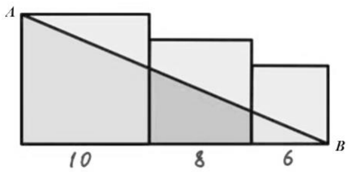
Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа___________________

5 тур, 20 минут

Задача 9. На рисунке три квадрата со сторонами 6, 8 и 10. Найдите суммарную площадь частей квадратов, расположенных выше отрезка *AB*.

Ответ:



Задача 10. Какое наименьшее число жильцов можно вселить в 30-квартирный дом так, чтобы в любых трёх наугад взятых квартирах проживало по меньшей мере 7 человек?

Ответ:

Класс_5 – 6_____ Ф.И.____Школа___________________

6 тур, 20 минут

Задача 11. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)? Порядок книг *A* – *B* считается отличным от порядка *B* – *A*.

Ответ:

Задача 12. На стороне *BC* прямоугольника *ABCD* выбрана точка *K* так, что площадь треугольника *ABK* составляет 1/3 площади всего прямоугольника. Какую часть площади всего прямоугольника составляет площадь треугольника *CDK*?

Ответ:

7-8 класс

Класс_7 – 8_____ Ф.И.____Школа___________________

1 тур, 10 минут

Задача 1. Найдите периметр прямоугольника, если биссектриса одного из его углов делит сторону прямоугольника на отрезки 10 и 20 см.

Ответ:

Задача 2. Шесть команд в круговом турнире (каждая сыграла с каждой один раз) набрали 12, 10, 9, 8, 7, 6 очков. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение – 0 очков?

Ответ:

Класс_7 – 8_____ Ф.И.____Школа___________________

2 тур, 10 минут

Задача 3. Число диагоналей многоугольника в 2024 раза больше числа его сторон. Сколько у него сторон?

Ответ:

Задача 4. В клетках таблицы 5×5 расставлены числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел одинакова. Известно, что сумма чисел в левом верхнем квадрате 2×2 равна 10, а сумма чисел в правом нижнем квадрате 3×3 равна 15. Найдите сумму всех чисел таблицы.

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.______________________________ Школа__________

3 тур, 15 минут

Задача 5. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?

Ответ:

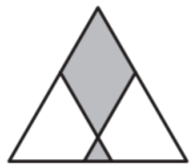
Задача 6. У дрессировщика много тигров и львов. Сколько у него способов составить шеренгу из 10 зверей, если тигров ставить рядом нельзя?

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.______________________________ Школа__________

4 тур, 15 минут

Задача 7. Правильный треугольник разделен двумя прямыми на ромб площади 18, правильный треугольник площади 1 и две равные трапеции. Какова площадь каждой трапеции?



Ответ:

Задача 8. Найти все натуральные числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5k+6}{8k+7}$ при целом значении k.

*Ответ:***3.**

Класс 7 – 8 Ф.И.______________________________ Школа__________

5 тур, 20 минут

Задача 9. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что $AK = AP$. Найдите отношение $PM : BK$.

Ответ:

Задача 10. В игре «Морской бой» на клетчатое поле выставляются корабли размера 1×1, 1×2, 1×3 или 1×4 так, чтобы они не соприкасались ни сторонами, ни углами. Какое наименьшее число клеток могут занять корабли на доске 10×10, если к ним нельзя добавить ни одного корабля без нарушения правил? (Не обязательно использовать корабли всех типов).

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.______________________________ Школа__________

5 тур, 20 минут

Задача 9. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что $AK = AP$. Найдите отношение $PM : BK$.

Ответ:

Задача 10. В игре «Морской бой» на клетчатое поле выставляются корабли размера 1×1, 1×2, 1×3 или 1×4 так, чтобы они не соприкасались ни сторонами, ни углами. Какое наименьшее число клеток могут занять корабли на доске 10×10, если к ним нельзя добавить ни одного корабля без нарушения правил? (Не обязательно использовать корабли всех типов).

Ответ:

Класс_<u>7 – 8</u>_____Ф.И.____Школа__________________

<u>6 тур, 20 минут</u>

Задача 11. На прямой слева направо расположены точки A, D и C так, что $CD = 2AD$. Точка B выбрана так, что $\angle CAB = 45°$ и $\angle CDB = 60°$. Найдите градусную меру угла BCD.

<u>*Ответ:*</u>

Задача 12. Решите уравнение: $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

<u>*Ответ:*</u>

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ 2 ТУРА

Ответы. Математический экспресс-2024, 4 класс

1 тур, 10 минут

Задача 1. Фрекен Бок испекла 20 плюшек. Из них в 12 плюшек она положила творог, а в 10 плюшек – варенье. При этом 5 плюшек оказались одновременно и с творогом, и с вареньем. Сколько плюшек оказались пустыми?
Ответ: **3**.

Задача 2. Девочка заменила каждую букву в своём имени её номером в русском алфавите. Получилось число 11310191. Как её зовут?
Ответ: **Алиса.**

2 тур, 10 минут

Задача 3. В комнате стоят трёхногие и пятиногие табуретки. Вася посчитал, что табуреток всего 8, а ножек у них вместе 30. Сколько трёхногих табуреток стоит в комнате?
Ответ: **5.**

Задача 4. На игральном кубике отмечены точками числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, причём общее число точек на любых двух противоположных гранях равно 7. Мила склеила столбик из 6 таких кубиков и подсчитала общее число точек на всех наружных гранях. Какое самое большое число она могла получить?

Ответ: **96.**

3 тур, 15 минут

Задача 5. На лужайке росли 35 жёлтых и белых одуванчиков. После того как восемь белых облетели, а два жёлтых побелели, жёлтых одуванчиков стало вдвое больше чем белых. Сколько белых и сколько жёлтых одуванчиков росло на лужайке вначале?
Ответ: **15 белых, 20 жёлтых.**

Задача 6. Мудрая сова решила составить энциклопедию. Сначала в её энциклопедии было 366 слов. Сова решила ещё раз подсчитать количество слов, но как только сова отсчитывала четыре слова, она тут же вспоминала ещё одно и дописывала его в конец. Сколько слов насчитает сова в своей энциклопедии, когда дойдёт до конца списка?
Ответ: **487.**

4 тур, 15 минут

Задача 7. Бабушка пообещала Васе, что накормит его на обед блинами. Один блин Вася ест за минуту, а бабушка выпекает за две минуты (по одному блину за раз). Вася хочет съесть подряд 10 блинов без перерыва. За какое наименьшее время (в минутах) до обеда должна начать печь блины бабушка? Бабушка всё ещё может печь блины, пока Вася ест.
Ответ: **11 минут.**

Задача 8. Для нумерации энциклопедии понадобилось 2022 цифры. Сколько страниц было в энциклопедии?
Ответ: **710 страниц.**

5 тур, 20 минут

Задача 9. Подставьте на место разных букв разные цифры, а на место одинаковых – одинаковые, чтобы получилось верное равенство: НЯ × НЯ = ОЛЯ. Найдите все варианты.
Ответ: **16 × 16 = 256, 31 × 31 = 961.**

Задача 10. В одном из узлов тетрадного листа живёт книжный червячок. Однажды он решил погулять по листу, выполз из своего узла и после каждой минуты прогулки стал поворачивать налево или направо. За первую минуту червячок прополз одну клетку, за вторую – две, ..., за седьмую минуту – семь клеток. На каком наименьшем расстоянии от домика (в клетках) он мог оказаться в конце седьмой минуты?
Ответ: **0.**

6 тур, 20 минут

Задача 11. Замените одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными, чтобы получилось верное равенство: КОШКА + КОШКА + КОШКА = СОБАКА. Найдите все варианты
Ответ: **56350 + 56350 + 56350 = 169050 и 57350 + 57350 + 57350 = 172050.**

Задача 12. Медвежонок Миша каждый день съедает столько булочек, какое сегодня число месяца. Со своего дня рождения и до конца месяца (включительно) Миша съел 216 булочек. Когда у Миши день рождения?
<u>*Ответ:*</u> **20 февраля.**

<u>Ответы.</u> Математический экспресс-2024, <u>5-6 классы</u>

<u>***1 тур, 10 минут***</u>
Задача 1. Колобок убегал от бабки, деда, волка, зайца, медведя и лисы. Между каждым персонажем было 10 км. От бабки колобок убежал со скоростью 10 км/час. После каждой встречи он увеличивал скорость еще на 5 км/час. За какое время он доберется до лисы?
<u>*Ответ:*</u> **2,9 часа или 2 часа 54 минуты.**

Задача 2. Сколько семизначных чисел, кратных 11, имеют в своей записи только цифры 0 и 1?
<u>*Ответ:*</u> **15 чисел.**

<u>***2 тур, 10 минут***</u>
Задача 3. Произведение трёх простых чисел равно их сумме, умноженной на 11. Найдите все такие тройки чисел с точностью до перестановки и запишите эти тройки чисел в порядке возрастания.
<u>*Ответ:*</u> **(2, 11, 13), (3, 7, 11).**

Задача 4. В трех кассах было в сумме 2016 билетов. В первые три дня первая касса продала соответственно 1/4, 1/5, 1/27 часть своих билетов, вторая касса – 1/5, 1/4, 1/57 часть своих билетов, а третья – 1/7, 1/6, 1/16 своих билетов. Сколько билетов было продано за эти три дня в этих трех кассах вместе?
<u>*Ответ:*</u> **921 билет.**

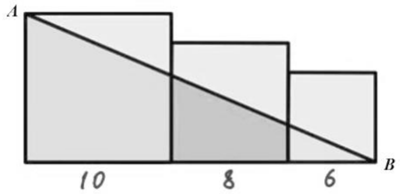
<u>***3 тур, 15 минут***</u>
Задача 5. На доске написано 1000 чисел. Первое число равно 2024, а каждое следующее равно сумме квадратов цифр предыдущего (например, второе число равно $2^2 + 0^2 + 2^2 + 4^2 = 24$). Найдите сумму всех написанных чисел.
<u>*Ответ:*</u> **7004.**

Задача 6. Сколько трехзначных чисел не делятся ни на 3, ни на 4, ни на 5?
<u>*Ответ:*</u> **360.**

<u>***4 тур, 15 минут***</u>
Задача 7. Опытный дрессировщик может вымыть слона за 40 минут, а его сыну для этого требуется 2 часа. За какое время они вымоют трёх слонов, работая вдвоём?
<u>*Ответ:*</u> **1 час 30 минут.**

Задача 8. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать НОД (наибольший общий делитель) этих чисел?
<u>*Ответ:*</u> **91.**

<u>***5 тур, 20 минут***</u>
Задача 9. На рисунке три квадрата со сторонами 6, 8 и 10. Найдите суммарную площадь частей квадратов, расположенных выше отрезка *AB*.
<u>*Ответ:*</u> **80.**



Задача 10. Какое наименьшее число жильцов можно вселить в 30-квартирный дом так, чтобы в любых трёх наугад взятых квартирах проживало по меньшей мере 7 человек?
<u>*Ответ:*</u> **88 жильцов.**

<u>***6 тур, 20 минут***</u>
Задача 11. На полке стоят 5 книг. Сколькими способами можно выложить в стопку несколько из них (стопка может состоять и из одной книги)? Порядок книг *A* – *B* считается отличным от порядка *B* – *A*.
<u>*Ответ:*</u> **325 способов.**

Задача 12. На стороне *BC* прямоугольника *ABCD* выбрана точка *K* так, что площадь треугольника *ABK* составляет 1/3 площади всего прямоугольника. Какую часть площади всего прямоугольника составляет площадь треугольника *CDK*?
<u>*Ответ:*</u> **1/6.**

<u>Ответы.</u> Математический экспресс-2024, <u>7-8 классы</u>

<u>1 тур, 10 минут</u>

Задача 1. Найдите периметр прямоугольника, если биссектриса одного из его углов делит сторону прямоугольника на отрезки 10 и 20 см.

<u>Ответ:</u> **80 и 100 см.**

Задача 2. Шесть команд в круговом турнире (каждая сыграла с каждой один раз) набрали 12, 10, 9, 8, 7, 6 очков. Сколько очков начислялось за победу, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение – 0 очков?

<u>Ответ:</u> **4 очка.**

<u>2 тур, 10 минут</u>

Задача 3. Число диагоналей многоугольника в 2024 раза больше числа его сторон. Сколько у него сторон?

<u>Ответ:</u> **4051.**

Задача 4. В клетках таблицы 5×5 расставлены числа так, что в каждой строке и в каждом столбце сумма всех чисел одинакова. Известно, что сумма чисел в левом верхнем квадрате 2×2 равна 10, а сумма чисел в правом нижнем квадрате 3×3 равна 15. Найдите сумму всех чисел таблицы.

<u>Ответ:</u> **25.**

<u>3 тур, 15 минут</u>

Задача 5. Аудитория имеет форму правильного шестиугольника со стороной 3 м. В каждом углу установлен храпометр, определяющий число спящих студентов на расстоянии, не превышающем 3 м. Сколько всего спящих студентов в аудитории, если сумма показаний храпометров равна 7?

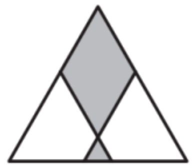
<u>Ответ:</u> **3 студента.**

Задача 6. У дрессировщика много тигров и львов. Сколько у него способов составить шеренгу из 10 зверей, если тигров ставить рядом нельзя?

<u>Ответ:</u> **144.**

<u>4 тур, 15 минут</u>

Задача 7. Правильный треугольник разделен двумя прямыми на ромб площади 18, правильный треугольник площади 1 и две равные трапеции. Какова площадь каждой трапеции?



<u>Ответ:</u> **15.**

Задача 8. Найти все натуральные числа, на которые может быть сократима дробь $\frac{5k+6}{8k+7}$ при целом значении k.

<u>Ответ:</u> **13.**

<u>5 тур, 20 минут</u>

Задача 9. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка K. Отрезок CK пересекает медиану AM треугольника в точке P. Оказалось, что $AK = AP$. Найдите отношение $PM : BK$.

<u>Ответ:</u> **1/2.**

Задача 10. В игре «Морской бой» на клетчатое поле выставляются корабли размера 1×1, 1×2, 1×3 или 1×4 так, чтобы они не соприкасались ни сторонами, ни углами. Какое наименьшее число клеток могут занять корабли на доске 10×10, если к ним нельзя добавить ни одного корабля без нарушения правил? (Не обязательно использовать корабли всех типов)

<u>Ответ:</u> **16 клеток.**

<u>6 тур, 20 минут</u>

Задача 11. На прямой слева направо расположены точки A, D и C так, что $CD = 2AD$. Точка B выбрана так, что $\angle CAB = 45°$ и $\angle CDB = 60°$. Найдите градусную меру угла BCD.

<u>Ответ:</u> **75°.**

Задача 12. Решите уравнение: $x^4 + y^4 + 2 = 4xy$.

<u>Ответ:</u> **(1; 1), (– 1; – 1).**