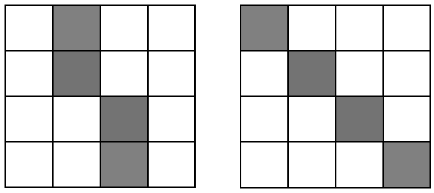
БАЙКАЛЬСКИЙ ТУРНИР МАТЕМАТИЧЕСКИХ БОЕВ-2023
ЗАДАНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 АА

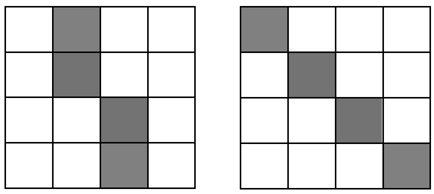
1. В сказочной стране живут 2024 чудо-птицы. У каждой из них красные либо синие перья и красная либо синяя голова. Известно, что 550 птиц имеют красные перья, 333 птицы имеют синие головы, наконец, 63 птицы полностью синие. Сколько всего полностью красных птиц?
2. Дан клетчатый квадрат 10×10. Сколькими способами в нём можно закрасить прямоугольник из 6 клеток?
3. Можно ли написать 7 последовательных натуральных чисел так, чтобы среди их цифр было ровно 15 троек?
4. Некоторые клетки бумажного белого квадрата 4×4 закрашены в серый цвет (см. рисунок слева). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые фигуры так, чтобы, только поворачивая (но не переворачивая на другую сторону), можно было сложить из них квадрат, в котором окажутся закрашенными все диагональные клетки (см. рисунок справа).



5. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 5 минут съедают 10 мандаринов, три Снегурочки и два Деда Мороза за 15 минут – 45 мандаринов. Сколько мандаринов один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят всего за минуту?
6. У скольких девятизначных чисел все цифры различны, сумма каждой пары соседних цифр нечётна, а само число делится на 4?

Турнир математических боёв № 1 АВ

1. Вася решил заниматься математикой, начиная с Нового года, по 3 часа в сутки. Каждое занятие должно длиться целое число часов (1, 2 или 3 часа) и начинаться с начала часа. Сколькими способами можно выбрать эти 3 часа в сутки?
2. Дан клетчатый квадрат 10×10. Сколькими способами в нём можно закрасить прямоугольник из 6 клеток?
3. Кирилл разделил некоторое число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Назар разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.
4. Можно ли написать 7 последовательных натуральных чисел так, чтобы среди их цифр было ровно 15 троек?
5. Некоторые клетки бумажного белого квадрата 4×4 закрашены в серый цвет (см. рисунок слева). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые фигуры так, чтобы, только поворачивая (но не переворачивая на другую сторону), можно было сложить из них квадрат, в котором окажутся закрашенными все диагональные клетки (см. рисунок справа).



6. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 5 минут съедают 10 мандаринов, три Снегурочки и два Деда Мороза за 15 минут – 45 мандаринов. Сколько мандаринов один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят всего за минуту?

Турнир математических боёв № 1 В

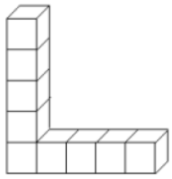
1. В квадрате $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = AB$ и $CPD = 90°$. Докажите, что $DP = 2CP$.
2. В некотором царстве будут использоваться монеты только в целое число динаров. Царь постановил, что любую сумму не больше 20 динаров можно будет набрать не более, чем тремя монетами. Какое наименьшее число достоинств монет может быть в этом царстве?
3. В шахматном турнире играют 10 девочек и 20 мальчиков. В каждом туре все разбиваются на пары противников. В первых трех турах 11 раз девочка играла против девочки. Сколько раз в этих турах мальчик играл против мальчика?
4. Есть три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо сложить две кучки в одну и разделить её на четыре кучки. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

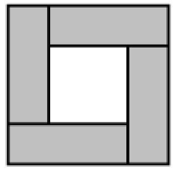
5. Имеется число a, представленное как несократимая дробь со знаменателем 7. Саша записал сумму $2a + 3a + 4a$ и округлил в ней каждое из трёх слагаемых до ближайшего целого. После этого сумма стала равной 77. Найдите a.
6. На столе лежали фигуры двух видов: квадраты 2×2 и прямоугольники 1×5, причем сумма периметров квадратов равнялась сумме периметров прямоугольников. Могло ли случиться, что из них всех можно сложить один большой квадрат (без дыр)?

Турнир математических боёв № 1 С

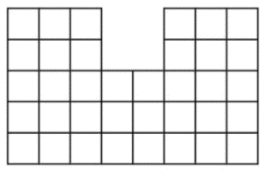
1. В треугольнике ABC сторона AC короче стороны AB, а один из углов, на которые медиана AF делит угол A в два раза больше другого. Точка D на прямой AF такова, что $BD \perp AB$. Докажите, что $AD = 2AC$.
2. За круглым столом сидят 12 мартышек и 38 попугаев. Есть ровно 5 пар мартышек, сидящих рядом. Сколько могло быть пар попугаев, сидящих рядом? (Если кто-то образует пару и с соседом слева, и с соседом справа, считаются обе пары).
3. Клетчатый квадрат со стороной n разрезали по границам клеток больше чем на n прямоугольников различной площади, при этом ни одна из частей не квадрат. При каком наименьшем n такое возможно?
4. Найдите наименьшее простое число p, сумма цифр которого – нечётное составное число.
5. Про различные действительные числа x и y известно, что
$$\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{y^2+1} = \frac{2}{xy+1}$$
Какие значения может принимать произведение xy?
6. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 записаны в строку в некотором порядке. Для каждой пары чисел синим цветом записали их разность, а красным цветом – сумму чисел, стоящих между ними. Назовём пару чисел хорошей, если её красное число делится без остатка на синее. Каково наибольшее возможное количество хороших пар? (Если числа стоят рядом, то сумма записанных между ними равна нулю).

Турнир математических боёв № 2 АА





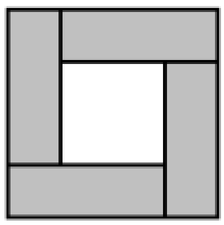
1. Дано четырехзначное число, все цифры которого различны. Известно, что сумма трех первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трех последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа?
2. Из 9 одинаковых кубиков склеена фигурка (см. рисунок 1). Можно ли её поверхность без щелей и наложений оклеить тремя бумажными прямоугольниками? (Прямоугольники можно перегибать через рёбра; прямоугольники могут быть не одинаковы).
3. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (белого) и четырех равных закрашенных прямоугольников (см. рисунок 2). Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Какова площадь большого квадрата?



4. На гранях кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что суммы на парах противоположных граней – три различных простых числа. На верхней грани стоит 1. Какое число может стоять на нижней грани?
5. Разрежьте приведённую на рисунке 3 фигуру на три части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат 6 × 6.
6. Сколько решений имеет ребус с неравенствами П < Р < И < Д < У < М < А < Й < Т > Е, где разными буквами обозначены разные цифры?

Турнир математических боёв № 2 АВ

1. Дано четырехзначное число, все цифры которого различны. Известно, что сумма трех первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трех последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа?

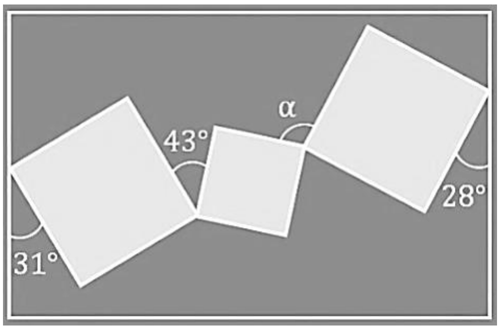


2. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (белого) и четырех равных закрашенных прямоугольников. Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Какова площадь большого квадрата?
3. Костя разбил все целые числа от 1 до 20 на две группы и сосчитал средние арифметические в каждой из групп. Одно из них оказалось равным 14. Какое наименьшее значение может принять второе? (Средним арифметическим набора нескольких чисел называется их сумма, делённая на их количество).

4. На гранях кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что суммы на парах противоположных граней – три различных простых числа. На верхней грани стоит 1. Какое число может стоять на нижней грани?
5. Назовем склеенный из двух кубиков параллелепипед $1\times1\times2$ *малым*. Можно ли поверхность 6 малых параллелепипедов окрасить в черный и белый цвет так, чтобы из них можно было сложить как белый снаружи параллелепипед $2 \times 2 \times 3$, так и черный снаружи параллелепипед $2 \times 2 \times 3$?
6. Сколько решений имеет ребус с неравенствами $П < Р < И < Д < У < М < А < Й < Т > Е$, где разными буквами обозначены разные цифры?

Турнир математических боёв № 2 В

1. В вершины куба расставлены цифры от 1 до 8. Докажите, что на некотором ребре цифры отличаются как минимум на 4.
2. Дед Мороз пришел в детский сад раздавать детям конфеты. Он обнаружил, что хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям – каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?
3. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга: 2, 4, 6, ..., 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?
4. Квадраты вписаны в прямоугольник, как показано на рисунке. Найдите угол α.



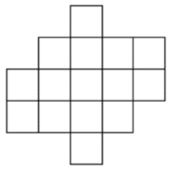
5. Можно ли сложить прямоугольник из спичек, разбитый на клетки со стороной в 1 спичку, использовав ровно 2024 спички? (Каждая клетка огорожена 4 спичками).
6. Олег ловил рыбу в пруду. Он уже было начал собирать вещи, но вдруг на его удочку клюнул карп, и его улов (количество пойманных рыб) увеличился в A раз. После этого он поймал еще сазана – его улов увеличился после этого в B раз, амура – его улов после этого увеличился в C раз, и в конце выловил еще одного карпа – улов увеличился в D раз. Оказалось, что $A\times B\times C\times D = 4/3$. Сколько рыб поймал всего в тот день Олег?

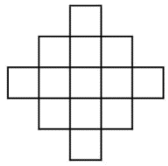
Турнир математических боёв № 2 С

1. AK и CP – высоты равнобедренного треугольника ABC. Какой может быть величина угла B, если известно, что $AB = BC$ и $AC = 2KP$?
2. Вещественные числа x, y, z не равны 0 и $x + 2y + 4z = 0$. Чему может быть равно выражение
$$\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{8z^2}{xy}?$$
3. Дед Мороз делает 12 витков по ледяному кольцу, двигаясь с постоянной скоростью. Одновременно из той же точки стартует Снегурочка, она движется в 3 раза медленнее Деда Мороза. Когда Дед Мороз удаляется от Снегурочки (то есть, расстояние между ними растёт), она льёт слёзы, а когда приближается, то не льёт. Какая часть длины кольца будет полита слезами? (Расстояние между Дедом Морозом и Снегурочкой считается по кольцу).
4. Каждая грань кубика размером $2\times2\times2$ состоит из четырёх единичных квадратных клеток. Денис взял 8 белых бумажных фигурок, каждая из которых состоит из трёх единичных клеток (каждая фигурка – либо прямоугольник, либо «уголок») и оклеил ими кубик без наложений и дырок. Затем он покрасил некоторые грани кубика в чёрный цвет. После этого Денис рассмотрел все свои 8 фигурок и заметил, что их развёртки не совпадают либо по форме, либо по окраске. Сколько граней Денис покрасил в чёрный цвет?
5. На доске записано 17 положительных чисел таких, что каждое из них в 4 раза больше суммы четвёртых степеней остальных. Чему равна сумма всех этих чисел?
6. От пятизначного числа отняли сумму кубов его цифр. Какой наибольший результат мог при этом получиться?
7.

Турнир математических боёв № 3 АА

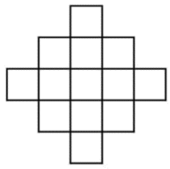
1. В спортивном классе каждый любитель футбола болеет либо за «Баварию», либо за «Барселону». После того, как один из «баварцев» стал «барселонцем», тех и других в классе стало поровну. Затем еще три «баварца» решили стать «барселонцами», и тогда «баварцев» стало вдвое меньше, чем «барселонцев». Сколько болельщиков футбола в этом классе?
2. Имеется 30 медалей весами 1, 2, 3, ..., 30 г, по 10 золотых, серебряных и бронзовых. Известно, что общий вес всех бронзовых медалей на 200 г больше, чем общий вес золотых. Найдите общий вес серебряных медалей.
3. Можно ли в таблицу 3×3 вписать цифры от 1 до 9 без повторов так, чтобы сумма в верхней строке была втрое больше суммы в нижней, а сумма в правом столбце – вдвое больше, чем в левом?
4. Можно ли заменить звёздочки ** * ** ** ** различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось пять чисел, и каждое, начиная с третьего, было равно сумме двух предыдущих?
5. На какое наименьшее количество (больше одной) одинаковых фигур можно разрезать по линиям сетки фигуру, изображенную на рисунке 1? Напоминаем, что одинаковыми называются фигуры, которые можно совместить наложением (фигуры можно поворачивать и переворачивать).
6. Расставьте числа в клетках фигуры на рисунке 2 так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 сумма чисел была равна 4, и сумма всех чисел была равна 4.





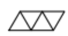
Турнир математических боёв № 3 АВ

1. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2310 и 2480 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?
2. В спортивном классе каждый любитель футбола болеет либо за «Баварию», либо за «Барселону». После того, как один из «баварцев» стал «барселонцем», тех и других в классе стало поровну. Затем еще три «баварца» решили стать «барселонцами», и тогда «баварцев» стало вдвое меньше, чем «барселонцев». Сколько болельщиков футбола в этом классе?
3. Можно ли в таблицу 3×3 вписать цифры от 1 до 9 без повторов так, чтобы сумма в верхней строке была втрое больше суммы в нижней, а сумма в правом столбце – вдвое больше, чем в левом?
4. Можно ли заменить звёздочки ** * ** ** ** различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось пять чисел, и каждое, начиная с третьего, было равно сумме двух предыдущих?
5. Расставьте числа в клетках фигуры на рисунке 1 так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 сумма чисел была равна 4, и сумма всех чисел была равна 4.
6. Сколько решений имеет ребус, приведённый ниже (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, числа не начинаются с нуля).



$$\begin{array}{r} \text{О Г Р} \\ +\ \text{С О М} \\ \hline \text{О М А Р} \end{array}$$

Турнир математических боёв № 3 В

1. Барон Мюнхгаузен увидел на доске равенство $4a^2 + 9b^2 + 36c^2 = 4a + 6b + 12c - 3$ и заявил, что он знает, чему равно число $a + b + c$. Не привирает ли барон?
2. Дано некоторое стозначное число X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи. К его первой, третьей, пятой, …, 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A. Из второй, четвёртой, шестой, …, сотой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B. Оказалось, что A делится на B. Чему могло быть равно число X?
3. Докажите, что если вписать в числе 2023 сколько угодно двоек между 20 и 23, тоже получится составное число.
4. На бумаге с треугольными клеточками нарисован клетчатый многоугольник. Оказалось, что его можно разрезать без остатка на 2023 фигурки вида . Докажите, что этот многоугольник нельзя разрезать на 2023 фигурки вида .
5. Найдите наибольшее натуральное число такое, что ни оно само, ни любое из чисел, полученных из него вычеркиванием любого количества цифр (но не всех) не делится на 3.

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{ab}{c} = \frac{a^2-b^2}{c^2-1}$. Докажите, что произведение каких-то двух чисел равно третьему.

Турнир математических боёв № 3 С

1. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 15, 23, 36, 50 и 72. Чему могла быть равна длина измеренной диагонали?
2. В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$. Докажите, что $AB + AD = BC$.
3. Для $a, b \neq 0$ оказалось, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$. Докажите, что $5(a^2 + b^2) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 9 + 8ab$.
4. Натуральные числа a, b, c, d, k таковы, что $k = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$. Докажите, что число k – точный квадрат.
5. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p - q)^2 = 6p - q$.
6. Существует ли четырёхзначное число, сумма цифр которого в 25 раз меньше их произведения?

РЕШЕНИЯ:

Турнир математических боёв № 1 АА

1. В сказочной стране живут 2024 чудо-птицы. У каждой из них красные либо синие перья и красная либо синяя голова. Известно, что 550 птиц имеют красные перья, 333 птицы имеют синие головы, наконец, 63 птицы полностью синие. Сколько всего полностью красных птиц?

Ответ: 280.

Решение. Всего птиц с синими головами и красными перьями 333 – 63 = 270. Тогда полностью красных – 550 – 270 = 280.

2. Дан клетчатый квадрат 10×10. Сколькими способами в нём можно закрасить прямоугольник из 6 клеток?

Ответ: 244.

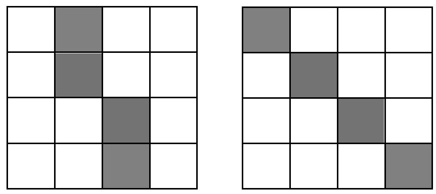
Решение. Прямоугольники из 6 клеток бывают двух видов – 2×3 или 1×6. Рассмотрим первый тип. В первой полосе 2×10 можно закрасить начиная с 1 по 8 позицию – 8 способов. Такие полосы можно выбрать 9 способами. Итого 72 способа. Столько же, если размещать его вертикально. Итого 144 способа. Рассмотрим второй тип. В первой полосе 1×10 можно закрасить начиная с 1 по 5 позицию – 5 способов. Такие полосы можно выбрать 10 способами. Итого 50 способов. Столько же, если размещать его вертикально. Итого 100 способов. Всего 244 способа.

3. Можно ли написать 7 последовательных натуральных чисел так, чтобы среди их цифр было ровно 15 троек?

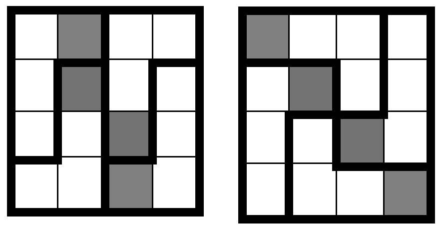
Ответ: да.

Решение. Пример: 3324, 3325, 3326, 3327, 3328, 3329, 3330.

4. Некоторые клетки бумажного белого квадрата 4×4 закрашены в серый цвет (см. рисунок слева). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые фигуры так, чтобы, только поворачивая (но не переворачивая на другую сторону), можно было сложить из них квадрат, в котором окажутся закрашенными все диагональные клетки (см. рисунок справа).



Решение. На рисунке.



5. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 5 минут съедают 10 мандаринов, три Снегурочки и два Деда Мороза за 15 минут – 45 мандаринов. Сколько мандаринов один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят всего за минуту?

Ответ: 1 мандарин.

Решение. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 1 минуту съедают 2 мандарина, три Снегурочки и два Деда Мороза за 1 минуту – 3 мандарина. Тогда пять Дедов Морозов и пять снегурочек за минуту съедают 5 мандаринов, а, значит, один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят за минуту 1 мандарин.

6. У скольких девятизначных чисел все цифры различны, сумма каждой пары соседних цифр нечётна, а само число делится на 4?

Ответ: 4320.

Решение. В числе должны чередоваться чётные и нечётные цифры, а, значит, последняя цифра чётная, предпоследняя – нечётная. Тогда последняя цифра – 2 или 6. Пусть это 2. Тогда на первом месте чётная цифра и это 4, 6 или 8 (3 варианта), на третьем месте – чётная цифра (3 варианта кроме 2 и первой цифры), на пятом месте – чётная цифра (2 варианта), на седьмом – выбирается однозначно. На втором месте – нечётная цифра (5 вариантов), не четвёртом – нечётная цифра (4 варианта), на шестом – нечётная цифра (3 варианта), на восьмом – нечётная цифра (2 варианта). Итого 3×3×2×5×4×3×2 = 2160. Столько же, если последняя цифра – 6. Всего 4320.

Турнир математических боёв № 1 АВ

1. Вася решил заниматься математикой, начиная с Нового года, по 3 часа в сутки. Каждое занятие должно длиться целое число часов (1, 2 или 3 часа) и начинаться с начала часа. Сколькими способами можно выбрать эти 3 часа в сутки?

Ответ: 2024.

Решение. Первый час можно выбрать 24 способами, второй – 23, третий – 22. Каждый набор посчитан 6 раз (АБВ, АВБ, БАВ, БВА, ВАБ, ВБА). Всего $24 \times 23 \times 22/6 = 2024$.

2. Дан клетчатый квадрат 10×10. Сколькими способами в нём можно закрасить прямоугольник из 6 клеток?

Ответ: 244.

Решение. Прямоугольники из 6 клеток бывают двух видов – 2×3 или 1×6. Рассмотрим первый тип. В первой полосе 2×10 можно закрасить начиная с 1 по 8 позицию – 8 способов. Такие полосы можно выбрать 9 способами. Итого 72 способа. Столько же, если размещать его вертикально. Итого 144 способа. Рассмотрим второй тип. В первой полосе 1×10 можно закрасить начиная с 1 по 5 позицию – 5 способов. Такие полосы можно выбрать 10 способами. Итого 50 способов. Столько же, если размещать его вертикально. Итого 100 способов. Всего 244 способа.

3. Кирилл разделил некоторое число на 333 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Назар разделил то же самое число на 777 и тоже обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 300. Найдите исходное число.

Ответ: 300 или 64708.

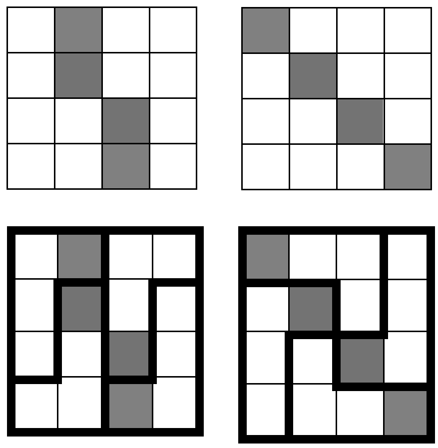
Решение. Пусть задано число a, первый раз получаем $a = 333x + 300 - x$, второй раз получаем $a = 777y + 300 - y$. Тогда $332x = 776y$, или $83x = 194y$. Тогда y делится на 83, $y = 83k$, $x = 194k$. Так как $x < 300$, то $x = 0$ или $x = 194$. Тогда $a = 300$ или $a = 333 \times 194 + 106 = 64708$.

4. Можно ли написать 7 последовательных натуральных чисел так, чтобы среди их цифр было ровно 15 троек?

Ответ: да.

Решение. Пример: 3324, 3325, 3326, 3327, 3328, 3329, 3330.

5. Некоторые клетки бумажного белого квадрата 4×4 закрашены в серый цвет (см. рисунок слева). Разрежьте квадрат на четыре одинаковые фигуры так, чтобы, только поворачивая (но не переворачивая на другую сторону), можно было сложить из них квадрат, в котором окажутся закрашенными все диагональные клетки (см. рисунок справа).



Решение. На рисунке.

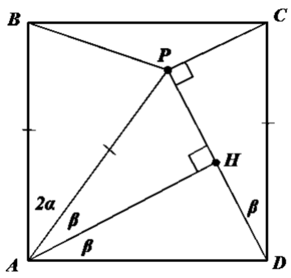
6. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 5 минут съедают 10 мандаринов, три Снегурочки и два Деда Мороза за 15 минут – 45 мандаринов. Сколько мандаринов один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят всего за минуту?

Ответ: 1 мандарин.

Решение. Три Деда Мороза и две Снегурочки за 1 минуту съедают 2 мандарина, три Снегурочки и два Деда Мороза за 1 минуту – 3 мандарина. Тогда пять Дедов Морозов и пять снегурочек за минуту съедают 5 мандаринов, а, значит, один Дед Мороз и одна Снегурочка съедят за минуту 1 мандарин.

Турнир математических боёв № 1 В

1. В квадрате $ABCD$ отмечена точка P так, что $AP = AB$ и $CPD = 90°$. Докажите, что $DP = 2CP$.



Решение. Пусть $\angle BAP = 2\alpha$. В равнобедренном треугольнике APD проведем высоту AH. $\angle PAH = \angle DAH = \beta = 45° - \alpha$. $\angle ADH = 90° - \beta$. В треугольнике PDC $\angle PDC = \beta$. Треугольники APH и DCP равны по гипотенузе и углу, следовательно, $PH = PC$ и $PD = 2PC$.

2. В некотором царстве будут использоваться монеты только в целое число динаров. Царь постановил, что любую сумму не больше 20 динаров можно будет набрать не более, чем тремя монетами. Какое наименьшее число достоинств монет может быть в этом царстве?

Ответ: 4.

Решение. *Оценка*. Обязательно должна быть монета в 1 динар. Пусть кроме этого есть монеты в a и в b динаров ($a < b$). Тогда можно получить суммы: 1, 2, 3, a, $2a$, $3a$, b, $2b$, $3b$, $a + 1$, $a + 2$, $2a + 1$, $b + 1$, $b + 2$, $2b + 1$, $a + b$, $2a + b$, $a + 2b$, $a + b + 1$. Всего 19 вариантов. Не хватает. Поэтому разных достоинств хотя бы 4. *Пример*. 1, 3, 7, 12 динаров.

3. В шахматном турнире играют 10 девочек и 20 мальчиков. В каждом туре все разбиваются на пары противников. В первых трех турах 11 раз девочка играла против девочки. Сколько раз в этих турах мальчик играл против мальчика?

Ответ: 26 раз.

Решение. Пусть в первом туре девочка играла против девочки x раз. Тогда $10 - 2x$ девочек играли против мальчиков, тогда осталось $10 + 2x$ мальчиков, т.е. мальчик играл против мальчика $5 + x$ раз. Аналогично, во втором туре девочка играла против девочки y раз, а мальчик против мальчика $5 + y$ раз. В третьем туре девочка играла против девочки $11 - x - y$ раз, девочка против мальчика $2x + 2y - 12$ раз, мальчик против мальчика $16 - x - y$ раз. Всего за 3 тура мальчик против мальчика сыграл $5 + x + 5 + y + 16 - x - y = 26$ раз.

4. Есть три кучки по 40 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За ход надо сложить две кучки в одну и разделить её на четыре кучки. Кто не сможет сделать ход – проиграл. Кто из играющих может всегда выигрывать, как бы ни играл соперник?

Ответ: выигрывает Вася.

Решение. В конце остаются либо все кучки по 1 камню, либо одна – 2 камня, остальные по 1 камню. Если не так, то ещё можно сделать ход. Вначале было 3 кучи, а за 1 ход добавляется по 2 кучки. Значит, количество кучек не чётное, 120 получится не может, значит, одна кучка – 2 камня, остальные по 1 камню. 119 кучек получается через 58 ходов, значит, последний ход был у Васи.

5. Имеется число a, представленное как несократимая дробь со знаменателем 7. Саша записал сумму $2a + 3a + 4a$ и округлил в ней каждое из трёх слагаемых до ближайшего целого. После этого сумма стала равной 77. Найдите a.

Ответ: 60/7.

Решение. Пусть $b < a < b + 1$, где b – целое. Тогда $2b < 2a < 2b + 2$, $3b < 3a < 3b + 3$, $4b < a < 4b + 4$. Отсюда $9b \le 77 \le 9b + 9$. Значит, $b \le 77/9$, $b \le 8$, $b \ge 68/9$, $b \ge 8$. Значит, $b = 8$. Пусть $a = k/7$, Тогда $56 < k < 63$. Перебирая k от 57 до 62, получаем $k = 60$.

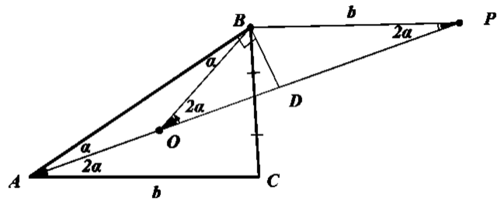
6. На столе лежали фигуры двух видов: квадраты 2×2 и прямоугольники 1×5, причем сумма периметров квадратов равнялась сумме периметров прямоугольников. Могло ли случиться, что из них всех можно сложить один большой квадрат (без дыр)?

Ответ: да.

Решение. Пусть квадратов x штук, прямоугольников – y штук. Тогда периметры всех квадратов 8x, периметры всех прямоугольников – 12y. Получаем уравнение $8x = 12y$, откуда $2x = 3y$. x делится на 3, поэтому $x = 3k$, тогда $y = 2k$. Всего в большом квадрате $12k + 10k = 22k$ клеток. Так как это квадрат, то наименьшее $k = 22$. Рассмотрим квадрат 22×22. Сложим 44 прямоугольника в прямоугольник 22×10, а 66 квадратов в прямоугольник 22×12, из которых делаем квадрат.

Турнир математических боёв № 1 С

1. В треугольнике ABC сторона AC короче стороны AB, а один из углов, на которые медиана AF делит угол A в два раза больше другого. Точка D на прямой AF такова, что $BD \perp AB$. Докажите, что $AD = 2AC$.



Решение. Удвоим медиану (см. рисунок). $BP = AC$, неравенство $AB > BP$ ($2\alpha > \alpha$) соответствует условию задачи. Другое разбиение угла A приводит к неравенству $AB < BP$ в треугольнике ABP, что противоречит условию задачи. Проведем медиану OB в прямоугольном треугольнике ABD, $AO = OB = OD$. Треугольники AOB, BOD и OBP – равнобедренные, $AO = OB = BP = AC$. Гипотенуза AD в два раза больше AO, следовательно, $AD = 2AC$.

2. За круглым столом сидят 12 мартышек и 38 попугаев. Есть ровно 5 пар мартышек, сидящих рядом. Сколько могло быть пар попугаев, сидящих рядом? (Если кто-то образует пару и с соседом слева, и с соседом справа, считаются обе пары).

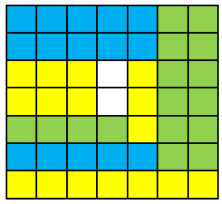
Ответ: 31 пара.

Решение. Рассмотрим пары для каждой мартышки. Их 24. Из них 10 пар – мартышка и мартышка (каждая пара считается два раза). Тогда пар мартышка – попугай 14. Рассмотрим пары для каждого попугая. Их 76, из них 14 – пары попугай – мартышка. Значит, пары попугай – попугай, посчитанных 2 раза – 62. Значит, всего пар – 31.

3. Клетчатый квадрат со стороной n разрезали по границам клеток больше чем на n прямоугольников различной площади, при этом ни одна из частей не квадрат. При каком наименьшем n такое возможно?

Ответ: 7.

Решение. *Оценка*. Наименьшие площади 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, … Если $n = 2$, то $2 + 3 + 4 > 4$. Если $n = 3$, то $2 + 3 + 4 + 5 > 9$. Если $n = 4$, то $2 + 3 + 4 + 5 + 6 > 16$. Если $n = 5$, то $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 > 25$. Если $n = 6$, то $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 35$, но площадь 7 получится не может (длина всего 6), получаем $2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 > 36$. Значит, $n \geq 7$. *Пример.* См. рисунок.



4. Найдите наименьшее простое число p, сумма цифр которого – нечётное составное число.

Ответ: 997.

Решение. Сумма цифр числа не меньше 25 (если сумма цифр 9 или 15, то число делится на 3 и больше 3, то есть, не простое. С суммой цифр 25 наименьшие числа $799 = 17\times47$, $889 = 7\times127$, $979 = 11\times89$. Следующее число 997. Оно простое.

5. Про различные действительные числа x и y известно, что

$$\frac{1}{x^2+1}+\frac{1}{y^2+1}=\frac{2}{xy+1}$$

Какие значения может принимать произведение xy?

Ответ: $xy = 1$.

Решение. Приведём правую часть к общему знаменателю и избавимся от дробей. Получим $(x^2 + y^2 + 2)(xy + 1) = 2(x^2 + 1)(y^2 + 1)$, откуда $x^3y + x^2 + xy^3 + y^2 + 2xy + 2 - 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2 = 0$. Получаем $xy(x^2 - 2xy + y^2) - (x^2 - 2xy + y^2) = 0$, $(x - y)^2(xy - 1) = 0$. Так как x и y – различные, то $xy = 1$.

6. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 записаны в строку в некотором порядке. Для каждой пары чисел синим цветом записали их разность, а красным цветом – сумму чисел, стоящих между ними. Назовём пару чисел хорошей, если её красное число делится без остатка на синее. Каково наибольшее возможное количество хороших пар? (Если числа стоят рядом, то сумма записанных между ними равна нулю).

Ответ: 14.

Решение. *Пример*:1, 6, 4, 2, 3, 5. *Оценка*. Общее количество пар чисел равно $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Докажем, что все они одновременно не могут быть хорошими. Рассмотрим три нечётных числа 1, 3, 5. Сумма чисел между двумя крайними нечётными числами в строке нечётная, так как она включает одно нечётное число и некоторое количество чётных чисел (может быть, ни одного). При этом разность крайних нечётных чисел чётная. Следовательно, эта пара чисел не может быть хорошей (нечётное число не может делиться на чётное). То есть хороших пар не более 14.

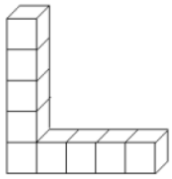
Турнир математических боёв № 2 АА

1. Дано четырехзначное число, все цифры которого различны. Известно, что сумма трех первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трех последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа?

Ответ: 18.

Решение. Первая и четвёртая цифры дают одинаковые остатки от деления на 9. Они различны, поэтому это могут быть только цифры 9 и 0. Тогда сумма оставшихся 9. Сумма всех цифр 18.

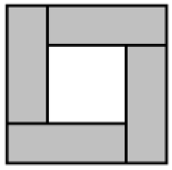
2. Из 9 одинаковых кубиков склеена фигурка (см. рисунок 1). Можно ли её поверхность без щелей и наложений оклеить тремя бумажными прямоугольниками? (Прямоугольники можно перегибать через рёбра; прямоугольники могут быть не одинаковы).



Ответ: да.

Решение. Первый прямоугольник 1×15 покрывает левую грань 1×5, верхнюю грань 1×1, правую грань 1×4, горизонтальную грань 1×4 и правую грань 1×1. Второй прямоугольник 1×11 покрывает вертикальную часть передней грани 1×5, часть нижней грани 1×1, вертикальную часть задней грани 1×5. Третий прямоугольник 3×4 покрывает горизонтальную часть передней грани 1×4, часть нижней грани 1×4, горизонтальную часть задней грани 1×4.

3. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (белого) и четырех равных закрашенных прямоугольников (см. рисунок 2). Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Какова площадь большого квадрата?



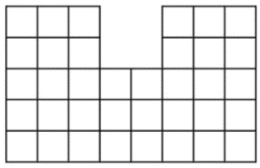
Ответ: 400.

Решение. Половина периметра прямоугольника, то есть 20 см, при распрямлении даёт сторону большого квадрата. Тогда площадь большого квадрата 400 см^2.

4. На гранях кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что суммы на парах противоположных граней – три различных простых числа. На верхней грани стоит 1. Какое число может стоять на нижней грани?

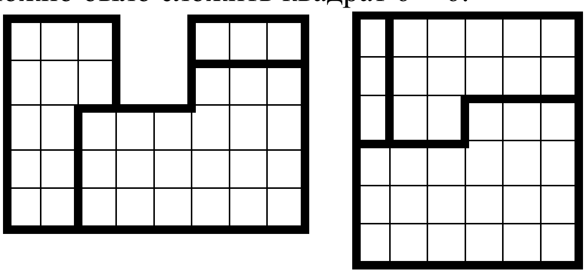
Ответ: 2.

Решение. Рассмотрим число 5. С ним могут быть только пары 5-2 и 5-6. Рассмотрим вариант 5-2, тогда для 6 пара только 1, получаем 6-1, но их суммы равны 7. Противоречие с условием (суммы – различные простые числа). Рассмотрим вариант 5-6. Пусть тогда напротив числа 2 число 3. Тогда 5-6, 2-3, 4-1, суммы двух последних равны 5. Пусть напротив числа 2 число 1, тогда 5-6, 2-1, 4-3. Это единственный вариант.



5. Разрежьте приведённую на рисунке 3 фигуру на три части так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат 6 × 6.

Решение.



6. Сколько решений имеет ребус с неравенствами П < Р < И < Д < У < М < А < Й < Т > Е, где разными буквами обозначены разные цифры?

Ответ: 9 решений.

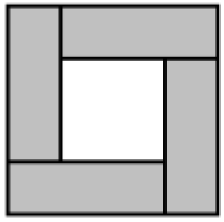
Решение. Для Е есть 9 вариантов. Для каждого из них остальная часть определяется однозначно.

Турнир математических боёв № 2 АВ

1. Дано четырехзначное число, все цифры которого различны. Известно, что сумма трех первых цифр этого числа делится на 9 и сумма трех последних цифр этого числа делится на 9. Какие значения может принимать сумма всех цифр этого числа?

Ответ: 18.
Решение. Первая и четвёртая цифры дают одинаковые остатки от деления на 9. Они различны, поэтому это могут быть только цифры 9 и 0. Тогда сумма оставшихся 9. Сумма всех цифр 18.

2. Квадрат состоит из одного внутреннего квадрата (белого) и четырех равных закрашенных прямоугольников. Периметр каждого прямоугольника равен 40 см. Какова площадь большого квадрата?



Ответ: 400.
Решение. Половина периметра прямоугольника, то есть 20 см, при распрямлении даёт сторону большого квадрата. Тогда площадь большого квадрата 400 см^2.

3. Костя разбил все целые числа от 1 до 20 на две группы и сосчитал средние арифметические в каждой из групп. Одно из них оказалось равным 14. Какое наименьшее значение может принять второе? (Средним арифметическим набора нескольких чисел называется их сумма, делённая на их количество).

Ответ: 4.
Решение. Сумма всех целых чисел от 1 до 20 равна 210. Пусть во второй группе n чисел. Тогда в первой группе $20 - n$ чисел, а их сумма $14(20 - n)$. Пусть среднее арифметическое чисел второй группы x, тогда их сумма xn. Получаем $14(20 - n) + xn = 210$, откуда $x = \frac{14n-70}{n}$. Так как $x > 0$, то $n > 5$. При $n = 6$ среднее арифметическое всех самых больших чисел $(7 + 8 + \ldots + 20)/14 = 13{,}5$. При $n = 7$ среднее арифметическое всех самых больших чисел $(8 + 9 + \ldots + 20)/13 = 14$, среднее арифметическое всех оставшихся $(1 + 2 + \ldots + 7)/7 = 4$. При $n = 8$ среднее арифметическое всех самых маленьких чисел $(1 + 2 + \ldots + 8)/8 = 4{,}5$, что больше 4. Значит, наименьшее значение 4.

4. На гранях кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, что суммы на парах противоположных граней – три различных простых числа. На верхней грани стоит 1. Какое число может стоять на нижней грани?

Ответ: 2.
Решение. Рассмотрим число 5. С ним могут быть только пары 5-2 и 5-6. Рассмотрим вариант 5-2, тогда для 6 пара только 1, получаем 6-1, но их суммы равны 7. Противоречие с условием (суммы – различные простые числа). Рассмотрим вариант 5-6. Пусть тогда напротив числа 2 число 3. Тогда 5-6, 2-3, 4-1, суммы двух последних равны 5. Пусть напротив числа 2 число 1, тогда 5-6, 2-1, 4-3. Это единственный вариант.

5. Назовем склеенный из двух кубиков параллелепипед $1\times1\times2$ *малым*. Можно ли поверхность 6 малых параллелепипедов окрасить в черный и белый цвет так, чтобы из них можно было сложить как белый снаружи параллелепипед $2 \times 2 \times 3$, так и черный снаружи параллелепипед $2 \times 2 \times 3$?

Ответ: нет.
Решение. Поверхность параллелепипеда $2\times2\times3$ равна $2\times2\times2 + 4\times2\times3 = 32$. У двух таких параллелепипедов поверхность 64. У 6 малых параллелепипедов поверхность $6\times10 = 60$. Это меньше 64, поэтому такое невозможно.

6. Сколько решений имеет ребус с неравенствами П < Р < И < Д < У < М < А < Й < Т > Е, где разными буквами обозначены разные цифры?

Ответ: 9.
Решение. Для Е есть 9 вариантов. Для каждого из них остальная часть определяется однозначно.

Турнир математических боёв № 2 В

1. В вершины куба расставлены цифры от 1 до 8. Докажите, что на некотором ребре цифры отличаются как минимум на 4.

Решение. Пусть нет соседних вершин, цифры в которых отличаются как минимум на 4. Рассмотрим вершину с числом 8. Тогда в соседних вершинах числа 7, 6 и 5. Рассмотрим грань с цифрами 8, 7, 6. Оставшаяся должна быть не менее 4, то есть 4. Рассмотрим грань с цифрами 8, 7, 5. Оставшаяся должна быть не менее 4, то есть 4. Но это разные вершины.

2. Дед Мороз пришел в детский сад раздавать детям конфеты. Он обнаружил, что хотя мальчиков в саду больше, чем девочек, он может все конфеты раздать поровну мальчикам, а может все конфеты раздать поровну девочкам. Дед Мороз, разумеется, раздал конфеты всем детям – каждому досталось по три. А если бы он и впрямь стал раздавать конфеты только девочкам, сколько бы получила каждая?

Ответ: 12.

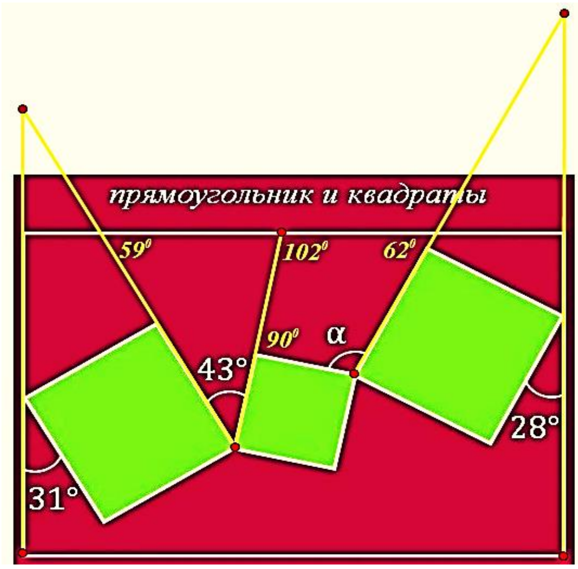
Решение. Пусть мальчиков x, а девочек y ($x > y$). Тогда всего $3(x + y)$ конфет. Это число делится на x, то есть $3y$ делится на x, значит, $3y = x$ или $3y = 2x$. Если $3y = x$, то всего конфет $9y + 3y = 12y$, т.е. девочкам достанется по 12 конфет. Если $3y = 2x$, то всего конфет $5x = 7{,}5y$, что противоречит условию.

3. За круглым столом сидят 10 учеников. Каждый из них задумал число и сообщил его двум своим соседям. После этого каждый ученик сказал вслух сумму чисел, которые ему сообщили. Оказалось, что произнесённые учениками числа в порядке обхода круга: 2, 4, 6, ..., 20. Какое число задумал школьник, сказавший число 12?

Ответ: 1.

Решение. Найдем сумму на чётных местах, сложив суммы у первого, третьего, пятого, седьмого и девятого и разделив на 2. Это 25. Сумма второго и четвёртого (говорит третий) – это 6, сумма восьмого и десятого (говорит девятый) – это 18. Тогда у шестого будет 1. (Можно найти все числа, вариант единственный: $a_1 = 6$, $a_2 = -3$, $a_3 = -2$, $a_4 = 9$, $a_5 = 10$, $a_6 = 1$, $a_7 = 2$, $a_8 = 13$, $a_9 = 14$, $a_{10} = 5$).

4. Квадраты вписаны в прямоугольник, как показано на рисунке. Найдите угол α.



Ответ: 106°.

Решение. См. рисунок.

5. Можно ли сложить прямоугольник из спичек, разбитый на клетки со стороной в 1 спичку, использовав ровно 2024 спички? (Каждая клетка огорожена 4 спичками).

Ответ: нет.

Решение. Пусть размеры прямоугольника $a \times b$. Тогда спичек потрачено $a(b + 1) + b(a + 1) = 2024$. Тогда $2ab + a + b = 2024$, $4ab + 2a + 2b + 1 = 4049$, $(2a + 1)(2b + 1) = 4049$. Но 4049 – простое число, поэтому такое невозможно.

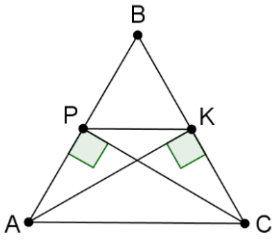
6. Олег ловил рыбу в пруду. Он уже было начал собирать вещи, но вдруг на его удочку клюнул карп, и его улов (количество пойманных рыб) увеличился в A раз. После этого он поймал еще сазана – его улов увеличился после этого в B раз, амура – его улов после этого увеличился в C раз, и в конце выловил еще одного карпа – улов увеличился в D раз. Оказалось, что $A \times B \times C \times D = 4/3$. Сколько рыб поймал всего в тот день Олег?

Ответ: 16.

Решение. Пусть первоначально было x рыб. Тогда получаем уравнение $x + 4 = ABCDx$, откуда $x = 12$, а всего улов 16 рыб.

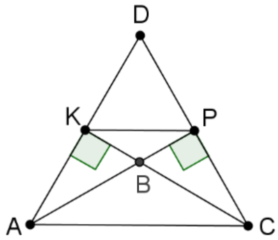
Турнир математических боёв № 2 С

1. AK и CP – высоты равнобедренного треугольника ABC. Какой может быть величина угла B, если известно, что $AB = BC$ и $AC = 2KP$?



Ответ: 60° и 120°.

Решение. Пусть треугольник ABC – остроугольный. Треугольники ACK и ACP равны по гипотенузе AC и острому углу $\angle ACK = \angle CAP$. Тогда $AP = CK$ и $BP = BK$. $\angle BAC = \angle BPK$, $AC \parallel PK$. Тогда PK – средняя линия треугольника ABC (иначе PK будет меньше или больше половины AC). Тогда AK – высота и медиана. Значит, треугольник ABC – равносторонний. $\angle ABC = 60°$.



Пусть треугольник ABC – тупоугольный. Пусть продолжения высот пересекаются в точке D. Треугольники ACK и ACP равны по гипотенузе AC и острому углу $\angle ACK = \angle CAP$. Тогда $AK = CP$ и $DK = DP$. $\angle DAC = \angle DKP$, $AC \parallel PK$. Тогда PK – средняя линия треугольника ADC (иначе PK будет меньше или больше половины AC). Тогда AP – высота и медиана. Значит, треугольник ADC – равносторонний. $\angle ADC = 60°$**.** Тогда $\angle ABC = 120°$.

2. Вещественные числа x, y, z не равны 0 и $x + 2y + 4z = 0$. Чему может быть равно выражение
$$\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{8z^2}{xy}?$$

Ответ: 3.

Решение. Из условия $x + 2y = -4z$, возводя обе части в куб, получаем $x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = -64z^3$. Отсюда $x^3 + 8y^3 + 64z^3 = -6xy(x + 2y) = 24xyz$. Приводим к общему знаменателю
$$\frac{x^2}{8yz} + \frac{y^2}{zx} + \frac{8z^2}{xy} = \frac{x^3 + 8y^3 + 64z^3}{8xyz} = \frac{24xyz}{8xyz} = 3.$$

3. Дед Мороз делает 12 витков по ледяному кольцу, двигаясь с постоянной скоростью. Одновременно из той же точки стартует Снегурочка, она движется в 3 раза медленнее Деда Мороза. Когда Дед Мороз удаляется от Снегурочки (то есть, расстояние между ними растёт), она льёт слёзы, а когда приближается, то не льёт. Какая часть длины кольца будет полита слезами? (Расстояние между Дедом Морозом и Снегурочкой считается по кольцу).

Ответ: полкруга.

Решение. Пусть Дед Мороз и Снегурочка едут в одну сторону. Тогда Дед Мороз едет от Снегурочки, удаляясь от неё, пока она не проедет четверть круга. После этого он будет приближаться к Снегурочке, пока не догонит на половине круга. Затем всё повторится. Таким образом, слезами будет полита первая и третья четверть круга, т. е. полкруга.

Пусть Дед Мороз и Снегурочка едут в противоположные стороны. Тогда Дед Мороз едет навстречу Снегурочке, удаляясь от неё, пока она не проедет одну восьмую круга. Потом они будут сближаться, пока не встретятся на расстоянии четверти круга. Затем всё повторится. Таким образом, слезами будет полита первая, третья, пятая, седьмая восьмушки круга, т. е. полкруга.

4. Каждая грань кубика размером 2×2×2 состоит из четырёх единичных квадратных клеток. Денис взял 8 белых бумажных фигурок, каждая из которых состоит из трёх единичных клеток (каждая фигурка – либо прямоугольник, либо «уголок») и оклеил ими кубик без наложений и дырок. Затем он покрасил некоторые грани кубика в чёрный цвет. После этого Денис рассмотрел все свои 8 фигурок и заметил, что их развёртки не совпадают либо по форме, либо по окраске. Сколько граней Денис покрасил в чёрный цвет?

Ответ: 3 грани.

Решение. Фигурка может быть прямоугольником или уголком, для каждого типа есть 6 видов раскрасок. На всех фигурках в сумме 18 белых клеток и 18 чёрных. Но если грани одноцветные, то прямоугольник, у которого цвет центра отличается от цвета обоих краев, не мог участвовать в оклейке. Остается 15 белых и 15 чёрных клеток, поэтому как белых, так и чёрных граней не может быть больше трёх. Следовательно, их может быть только по три каждого цвета.

5. На доске записано 17 положительных чисел таких, что каждое из них в 4 раза больше суммы четвёртых степеней остальных. Чему равна сумма всех этих чисел?

Ответ: 4,25.

Решение. Упорядочим все числа $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{17}$. Рассмотрим два равенства

$$\begin{cases} a_1 = 4(a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_{17}^4) \\ a_2 = 4(a_1^4 + a_3^4 + \ldots + a_{17}^4) \end{cases}$$

Отсюда $a_1 - a_2 = 4(a_2^4 - a_1^4)$. Левая часть неположительна, правая часть неотрицательна. Тогда $a_1 = a_2$. Аналогичными действиями можно получить $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{17} = a$.

Выпишем все равенства из условия задачи, сложим их, получим $a_1 + a_2 + \ldots + a_{17} = 64(a_1^4 + \ldots + a_{17}^4)$, $17a = 64 \cdot 17a^4$, $a = 0{,}25$, $17a = 4{,}25$.

6. От пятизначного числа отняли сумму кубов его цифр. Какой наибольший результат мог при этом получиться?

Ответ: 97938.

Решение. Для двух старших разрядов берём цифру 9, так как вычитание 729 из 90000 и из 9000 дает больший результат, чем просто числа 80000 и 8000 соответственно. Для разряда сотен рассмотрим разности между цифрой, умноженной на 100 и кубом цифры. 900 – 729 = 171, 800 – 512 = 288, 700 – 343 = 357, 600 – 216 = 384, 500 – 125 = 375, 400 – 64 = 336, остальные результаты меньше 300. Берём цифру 6. Для разряда десятков смотрим те, при которых разность цифры, умноженной на 10 и кубом цифры положительна: 30 – 27 = 3, 20 – 8 = 12, 10 – 1 = 9. Берём цифру 2. Для цифры единиц все разности отрицательны, кроме 1 – 1 = 0 и 0 – 0 = 0. Можно взять любую из них. Получаем 99620 – 729 – 729 – 216 – 8 – 0 = 97938.

Турнир математических боёв № 3 АА

1. В спортивном классе каждый любитель футбола болеет либо за «Баварию», либо за «Барселону». После того, как один из «баварцев» стал «барселонцем», тех и других в классе стало поровну. Затем еще три «баварца» решили стать «барселонцами», и тогда «баварцев» стало вдвое меньше, чем «барселонцев». Сколько болельщиков футбола в этом классе?

Ответ: 18.

Решение. Пусть всего $2x$ болельщиков. Тогда $x + 3 = 2(x – 3)$, откуда $x = 9$, тогда $2x = 18$.

2. Имеется 30 медалей весами 1, 2, 3, ..., 30 г, по 10 золотых, серебряных и бронзовых. Известно, что общий вес всех бронзовых медалей на 200 г больше, чем общий вес золотых. Найдите общий вес серебряных медалей.

Ответ: 155 г.

Решение. Найдем максимальный вес 10 медалей: $30 + 29 + … + 21 = 255$. Найдем минимальный вес 10 медалей: $1 + 2 + … + 10 = 55$. Разница в 200 г возможна только в этом случае. Значит, серебряные медали имеют вес от 11 до 20 г, всего 155 г.

3. Можно ли в таблицу $3×3$ вписать цифры от 1 до 9 без повторов так, чтобы сумма в верхней строке была втрое больше суммы в нижней, а сумма в правом столбце – вдвое больше, чем в левом?

Ответ: да.

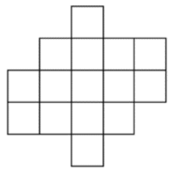
Решение. На рисунке.

4	6	8
5	7	9
1	2	3

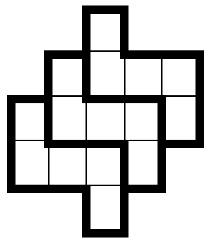
4. Можно ли заменить звёздочки ** * ** ** ** различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось пять чисел, и каждое, начиная с третьего, было равно сумме двух предыдущих?

Ответ: да.

Решение. 27, 9, 36, 45, 81.



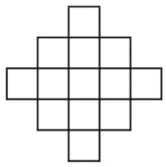
5. На какое наименьшее количество (больше одной) одинаковых фигур можно разрезать по линиям сетки фигуру, изображенную на рисунке 1? Напоминаем, что одинаковыми называются фигуры, которые можно совместить наложением (фигуры можно поворачивать и переворачивать).



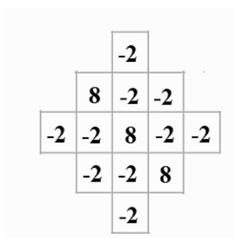
Ответ: на 3.

Решение. *Оценка*. Площадь всей фигуры 15. Самая большая возможная площадь для фигур после разрезания 5 (нет собственных делителей у 15, больше 5). Тогда фигур не меньше 3. *Пример* на рисунке.

6. Расставьте числа в клетках фигуры на рисунке 2 так, чтобы в каждом прямоугольнике 1 × 3 сумма чисел была равна 4, и сумма всех чисел была равна 4.



Решение. В центре обязательно должно быть число 8, а дальше проверять расстановку. Например, может быть такая:



Турнир математических боёв № 3 АВ

1. В магазине продаются орехи четырёх видов: фундук, миндаль, кешью и фисташки. Степан хочет купить 1 килограмм орехов одного вида и ещё 1 килограмм орехов — другого. Он вычислил, во сколько ему может обойтись такая покупка в зависимости от того, какие два вида орехов он выберет. Пять из шести возможных покупок Степана стоили бы 1900, 2070, 2110, 2310 и 2480 рублей. Сколько рублей составляет стоимость шестой возможной покупки?

<u>Ответ:</u> 2270 р.

<u>Решение.</u> Все 6 возможных покупок разбиваются на 3 пары так, что в каждой паре получаются все 4 вида орехов.

Попарные суммы покупок:

1900 + 2070 = 2970, 1900 + 2110 = 4010, 1900 + 2310 = 4210, 1900 + 2480 = 4380, 2070 + 2110 = 4180, 2070 + 2310 = 4380, 2070 + 2480 = 4550, 2110 + 2310 = 4420, 2110 + 2480 = 4590, 2310 + 2480 = 4790. Одинаковые суммы 4380, поэтому все 4 вида орехов по 1 кг стоят 4380. Значит, шестая покупка даёт вместе с неиспользованной парой 2110 в сумме 4380. Следовательно, шестая покупка стоит 2270 р.

2. В спортивном классе каждый любитель футбола болеет либо за «Баварию», либо за «Барселону». После того, как один из «баварцев» стал «барселонцем», тех и других в классе стало поровну. Затем еще три «баварца» решили стать «барселонцами», и тогда «баварцев» стало вдвое меньше, чем «барселонцев». Сколько болельщиков футбола в этом классе?

<u>Ответ:</u> 18.

<u>Решение.</u> Пусть всего $2x$ болельщиков. Тогда $x + 3 = 2(x - 3)$, откуда $x = 9$, тогда $2x = 18$.

3. Можно ли в таблицу *3×3* вписать цифры от 1 до 9 без повторов так, чтобы сумма в верхней строке была втрое больше суммы в нижней, а сумма в правом столбце – вдвое больше, чем в левом?

<u>Ответ:</u> да.

<u>Решение.</u> На рисунке.

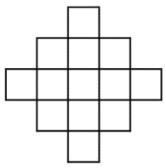
4	6	8
5	7	9
1	2	3

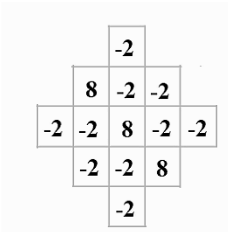
4. Можно ли заменить звёздочки ** * ** ** ** различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось пять чисел, и каждое, начиная с третьего, было равно сумме двух предыдущих?

<u>Ответ:</u> да.

<u>Решение.</u> 27, 9, 36, 45, 81.

5. Расставьте числа в клетках фигуры на рисунке 2 так, чтобы в каждом прямоугольнике 1 × 3 сумма чисел была равна 4, и сумма всех чисел была равна 4.





<u>Решение.</u> В центре обязательно должно быть число 8, а дальше проверять расстановку. Например, может быть такая:

6. Сколько решений имеет ребус, приведённый ниже (одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры, числа не начинаются с нуля).

$$\begin{array}{r} \text{О Г Р} \\ +\ \text{С О М} \\ \hline \text{О М А Р} \end{array}$$

<u>Ответ:</u> 30 решений.

<u>Решение.</u> Так как сумма двух трёхзначных чисел равна четырёхзначному, то О = 1. Тогда С = 8 или 9. Так как Р + М даёт Р или 10 + Р, то М = 0. Значит, Г + 1 не даёт перехода через десяток (иначе А = 0), поэтому С = 9. Для Г возможны варианты от 2 до 7 (Если Г = 8, то А = 9, а 9 уже есть). Теперь А определяется однозначно. Всего 6 вариантов. Задействованы уже 5 цифр, значит, для каждого из этих вариантов остаётся 5 вариантов для Р. Всего 6×5 = 30 вариантов.

Турнир математических боёв № 3 В

1. Барон Мюнхгаузен увидел на доске равенство $4a^2 + 9b^2 + 36c^2 = 4a + 6b + 12c - 3$ и заявил, что он знает, чему равно число $a + b + c$. Не привирает ли барон?

Ответ: нет, барон всегда говорит правду.

Решение. Перенесём всё в левую часть и выделим полные квадраты. $(2a - 1)^2 + (3b - 1)^2 + (6c - 1)^2 = 0$. Отсюда каждый из квадратов равен 0, т.е. $a = 1/2$, $b = 1/3$, $c = 1/6$. Тогда их сумма равна 1.

2. Дано некоторое стозначное число X без нулей, единиц, восьмёрок и девяток в записи. К его первой, третьей, пятой, …, 99-ой слева цифрам прибавили по двойке и получили число A. Из второй, четвёртой, шестой, …, сотой слева цифры числа X вычли по двойке и получили число B. Оказалось, что A делится на B. Чему могло быть равно число X?

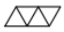
Ответ: $X = 242424 \ldots 424$

Решение. Заметим, что число $A - B$ состоит из ста двоек и делится на стозначное число B. В частном $(A - B)/B$ не могло получиться 2, поскольку тогда первая цифра числа X была бы единицей, и не могло получиться больше 2, поскольку число B тогда было бы не стозначным. Значит, частное равно 1, B состоит из ста двоек, откуда и получается ответ.

3. Докажите, что если вписать в числе 2023 сколько угодно двоек между 20 и 23, тоже получится составное число.

Решение. Разность двух таких чисел, в которых число двоек различается на 1, имеет вид 1820…0. Но $182 = 7\cdot 26$, то есть делится на 7, как и 2023. Поэтому, добавляя двойки по одной, мы будем получать числа, делящиеся на 7.

4. На бумаге с треугольными клеточками нарисован клетчатый многоугольник. Оказалось, что его можно разрезать без остатка на 2023 фигурки вида . Докажите, что этот многоугольник нельзя разрезать на 2023 фигурки вида .

Решение. Раскрасим фигуру в шахматном порядке (клетки, соседние по стороне – разных цветов). Каждая из фигурок  содержит две чёрные и две белые клетки. Тогда в этом многоугольнике должно быть поровну чёрных и белых клеток. Но каждый треугольник  содержит 3 чёрные и 1 белую клетки или наоборот. Поэтому число треугольников двух типов должно совпадать. То есть, количество треугольников должно быть чётным, а их 2023.

5. Найдите наибольшее натуральное число такое, что ни оно само, ни любое из чисел, полученных из него вычеркиванием любого количества цифр (но не всех) не делится на 3.

Ответ: 88.

Решение. В этом числе нет цифр, кратных 3. Нет цифр, дающих разные остатки при делении на 3. Нет трёх цифр с одинаковым остатком при делении на 3. Тогда число состоит максимум из двух цифр, которые дают один и тот же ненулевой остаток от деления на 3. Самое большое из таких чисел – 88.

6. Положительные числа a, b, c таковы, что $\frac{ab}{c} = \frac{a^2-b^2}{c^2-1}$. Докажите, что произведение каких-то двух чисел равно третьему.

Решение. По свойству пропорции $ab(c^2 - 1) = (a^2 - b^2)c$. Раскроем скобки и перенесём всё в одну часть. Получаем $abc^2 - ab - a^2c + b^2c = 0$, перегруппируем $abc^2 - a^2c - ab + b^2c = 0$, разложим на множители $ac(bc - a) + b(bc - a) = 0$, $(ac + b)(bc - a) = 0$. Так как все числа положительные, то первый множитель $ac + b$ не равен 0, значит, $bc - a = 0$, $bc = a$.

Турнир математических боёв № 3 С

1. В результате измерения четырёх сторон и одной из диагоналей некоторого четырёхугольника получились числа 15, 23, 36, 50 и 72. Чему могла быть равна длина измеренной диагонали?

Ответ: 23, 36, 50.

Решение. Диагональ 15 не может быть, так как со стороной 72 и диагональю 15 ни одна другая сторона не может образовать треугольник (не выполняется неравенство треугольника). Диагональ 72 не может быть, так как со стороной 15и диагональю 72 ни одна другая сторона не может образовать треугольник. При диагонали 23 берём стороны 15 и 36 с одной стороны и 50 и 72 с другой. При диагонали 36 берём стороны 15 и 23 с одной стороны и 50 и 72 с другой. При диагонали 50 берём стороны 15 и 36 с одной стороны и 23 и 72 с другой. Получаем возможные диагонали 23, 36, 50.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 3\angle C$. Точка D на стороне BC обладает тем свойством, что $\angle ADC = 2\angle C$. Докажите, что $AB + AD = BC$.

Решение. Продолжим отрезок AB за точку A и отложим на продолжении отрезок $AE = AD$. Заметим, что $\angle EAC = 180° - \angle BAC = 180° - 3\angle C$, поэтому треугольники ADC и AEC равны (по сторонам AC, $AD = AE$ и углу между ними). Отсюда находим углы треугольника AEC: $\angle AEC = \angle ADC = 2\angle C$, $\angle ACE = \angle C$, т.е. $\angle BCE = 2\angle C$, поэтому треугольник BEC равнобедренный. Таким образом, $AB + AD = AB + AE = BE = BC$.

3. Для $a, b \neq 0$ оказалось, что $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3$. Докажите, что $5(a^2 + b^2) + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} > 9 + 8ab$.

Решение. Из условия получаем, что $a^2 + b^2 = 3ab$, причём $ab > 0$. Отсюда $5(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)/a^2b^2 =$
$= 15ab + 3/ab = 8ab + 7ab + 3/ab \geq 8ab + 2\sqrt{21ab/ab}$ (неравенство Коши) $= 8ab + \sqrt{84} > 8ab + 9$.

4. Натуральные числа a, b, c, d, k таковы, что $k = \frac{ab}{cd} = \frac{a^2-b^2}{c^2-d^2}$. Докажите, что число k – точный квадрат.

Решение. $ab(c^2 - d^2) = cd(a^2 - b^2)$. Тогда $abc^2 - abd^2 - a^2cd + b^2cd = 0$, $ac(bc - ad) + bd(bc - ad) = 0$. Получаем $(bc - ad)(ac + bd) = 0$. Так как числа натуральные, то $bc - ad = 0$, $bc = ad$, $\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$, k – точный квадрат.

5. Найдите все пары простых чисел p и q таких, что $(2p - q)^2 = 6p - q$.

Ответ: (5; 5), (3; 2).

Решение. $(2p - q)^2 = 6p - 3q + 2q$, $(2p - q)^2 - 3(2p - q) = 2q$, $(2p - q)(2p - q - 3) = 2q$. Так как q – простое число, то возможны 4 случая.

1) $\begin{cases} 2p - q = 1; \\ 2p - q - 3 = 2q \end{cases}$ $\begin{cases} 2p - q = 1; \\ 2q = -2 \end{cases}$ решений нет.

2) $\begin{cases} 2p - q = 2; \\ 2p - q - 3 = q \end{cases}$ $\begin{cases} q = 2p - 2; \\ 2p - 2p + 2 - 3 = 2p - 2 \end{cases}$ $\begin{cases} q = 2p - 2; \\ 2p = 1 \end{cases}$ решений нет.

3) $\begin{cases} 2p - q = q; \\ 2p - q - 3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} p = q; \\ 2p - p - 3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} p = q; \\ p = 5 \end{cases}$ (5; 5).

4) $\begin{cases} 2p - q = 2q; \\ 2p - q - 3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2p = 3q; \\ 3q - q - 3 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2p = 3q; \\ q = 2 \end{cases}$ (3; 2).

6. Существует ли четырёхзначное число, сумма цифр которого в 25 раз меньше их произведения?

Ответ: нет.

Решение. Предположим, что такое число существует. Так как произведение его цифр делится на 25, то среди его цифр должны быть две пятерки (нулей быть не может, иначе произведение цифр было бы равно нулю). Пусть a и b – две другие его цифры, тогда сумма цифр этого числа равна $10 + a + b$, а произведение цифр равно $25ab$. Составим уравнение: $25(10 + a + b) = 25ab$. Отсюда $10 + a + b = ab$, или $ab - a - b + 1 = 11$. Тогда $(a - 1)(b - 1) = 11$. Так как 11 – простое число, то один из множителей равен 1, а другой равен 11. Но a и b – цифры, поэтому ни одна из них не равна 12. Противоречие.