ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
БАЙКАЛЬСКОГО МЕЖРЕГИОНАЛЬНОГО ТУРНИРА 2022
Конкурс «Математический фейерверк»

ЗАДАНИЯ 1 ТУРА:

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год
5-6 классы

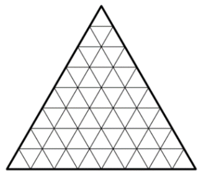
1. Можно ли вписать вместо звездочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$?
2. Разрежьте доску на рисунке на прямоугольники по линиям сетки так, чтобы в каждом прямоугольнике было одно число, равное площади прямоугольника.

	2		5			
2					2	
			8			
2		3		2		
	3			2		4
2	2				5	
						5

3. На двух карточках записаны четыре различные цифры – по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот).
4. Какое наименьшее число королей необходимо поставить на доску 7 × 7 так, чтобы все клетки на доске были побиты? (Король бьёт клетку, на которой стоит).

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год
7 класс

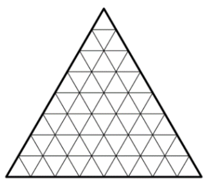
1. Пусть a, b, c – произвольные ненулевые числа. Пусть $A=\frac{b^2+c^2}{a^2}$, $B=\frac{a^2+c^2}{b^2}$, $C=\frac{a^2+b^2}{c^2}$, $P=A\cdot B\cdot C$ и $S=A+B+C$. Какие значения может принимать выражение $P-S$?
2. После футбольного турнира в один круг (то есть каждая команда играла с каждой ровно один раз), выяснилось, что:
   • каждая команда выиграла ровно 2 игры и проиграла ровно 2 игры (остальные матчи завершились вничью);
   • нет таких трёх команд ***А***, ***Б*** и ***В***, что команда ***А*** выиграла у команды ***Б***, команда ***Б*** выиграла у команды ***В*** и команда ***В*** выиграла у команды ***А***.
   Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?



3. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.
4. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество маленьких треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год
8 класс

1. Пусть a, b, c – произвольные ненулевые числа. Пусть $A=\frac{b^2+c^2}{a^2}$, $B=\frac{a^2+c^2}{b^2}$, $C=\frac{a^2+b^2}{c^2}$, $P=A\cdot B\cdot C$ и $S=A+B+C$. Какие значения может принимать выражение $P-S$?
2. После футбольного турнира в один круг (то есть каждая команда играла с каждой ровно один раз), выяснилось, что:
   • каждая команда выиграла ровно 2 игры и проиграла ровно 2 игры (остальные матчи завершились вничью);
   • нет таких трёх команд ***А***, ***Б*** и ***В***, что команда ***А*** выиграла у команды ***Б***, команда ***Б*** выиграла у команды ***В*** и команда ***В*** выиграла у команды ***А***.
   Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?



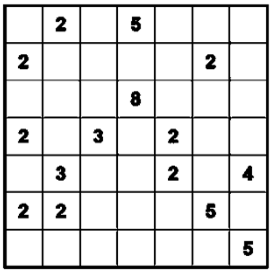
3. В треугольнике ABC с прямым углом C угол B равен 30°. Точка M – середина гипотенузы AB. На катете BC выбрана точка K так, что $AK + KM = BC$. Докажите, что MK и AB перпендикулярны.
4. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество маленьких треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?

РЕШЕНИЯ:

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год
5-6 классы

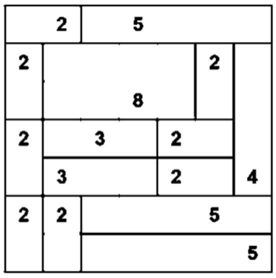
1. Можно ли вписать вместо звездочек шесть различных цифр так, чтобы все дроби были несократимыми, а равенство верным: $\frac{*}{*}+\frac{*}{*}=\frac{*}{*}$?

Ответ: Да.
Решение. Например, 1/6 + 7/3 = 5/2 (возможны другие примеры).
Критерии. Любой верный пример – 7 баллов.



2. Разрежьте доску на рисунке на прямоугольники по линиям сетки так, чтобы в каждом прямоугольнике было одно число, равное площади прямоугольника.

Решение. Пример разрезания – на рисунке.
Критерии. Верное разрезание – 7 баллов.

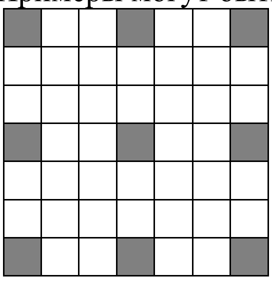


3. На двух карточках записаны четыре различные цифры – по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, т. е. делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот).

Ответ. Нет, не может.
Решение. Все двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6 или 8, четны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Поэтому такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках нельзя. Остаются цифры 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, то из них можно сложить составное число 39. Если же они записаны на одной карточке, то на второй записаны 1 и 7, и тогда можно сложить составное число 91 = 7 · 13.
Критерии. Полное решение – 7 баллов, доказано, что нельзя брать чётные и 5 – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.

4. Какое наименьшее число королей необходимо поставить на доску 7 × 7 так, чтобы все клетки на доске были побиты? (Король бьёт клетку, на которой стоит).

Ответ: 9 королей.
Решение. **Оценка.** Покрасим клетки таблицы, как показано на рисунке. Один король не может бить две покрашенные клетки. Поэтому королей не менее 9.
Пример на 9 королей на втором рисунке (Примеры могут быть другими).



Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год
7 класс

1. Пусть a, b, c – произвольные ненулевые числа. Пусть $A = \frac{b^2+c^2}{a^2}$, $B = \frac{a^2+c^2}{b^2}$, $C = \frac{a^2+b^2}{c^2}$, $P = A \cdot B \cdot C$ и $S = A + B + C$. Какие значения может принимать выражение $P - S$?

Ответ: 2.

Решение. $P = A \cdot B \cdot C = \left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2+c^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right) = \left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right) =$
$= \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+1+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2} = S + 2$, тогда $P - S = 2$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

2. После футбольного турнира в один круг (то есть каждая команда играла с каждой ровно один раз), выяснилось, что:
   - каждая команда выиграла ровно 2 игры и проиграла ровно 2 игры (остальные матчи завершились вничью);
   - нет таких трёх команд ***А***, ***Б*** и ***В***, что команда ***А*** выиграла у команды ***Б***, команда ***Б*** выиграла у команды ***В*** и команда ***В*** выиграла у команды ***А***.

   Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

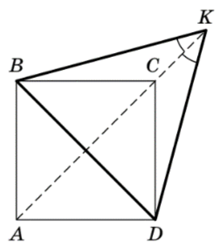
Ответ: 7 команд.

Решение. **Оценка.** Из первого условия команд не меньше 5.
Пусть участвовало 5 команд. Пусть команда ***А*** выиграла у команд ***Б*** и ***В***, а проиграла командам ***Г*** и ***Д***. Тогда команда ***Б*** может выиграть только у команды ***В***, чтобы не нарушилось второе условие, то есть, только у одной команды.
Пусть участвовало 6 команд. Пусть команда ***А*** выиграла у команд ***Б*** и ***В***, а проиграла командам ***Г*** и ***Д***. Тогда команда ***Б*** может выиграть только у команды ***В*** и оставшейся команды ***Е***, чтобы не нарушилось второе условие. Тогда команда ***В*** может выиграть только у команды ***Е***, то есть, только у одной команды.
Пример. Покажем, что для 7 команд такой турнир возможен. Пусть команды ***А***, ***Б***, ***В***, ***Г***, ***Д***, ***Е*** и ***Ж*** расставлены по кругу. Пусть каждая команда выиграла у двух, которые идут после неё, то есть ***Е*** выиграла у ***Ж*** и ***А***. Тогда каждая проиграла двум, которые идут перед ней. Остальные игры заканчиваются вничью. Тройки команд, нарушающих второе условие, нет. В этом можно убедиться на примере команды ***А***, для остальных всё аналогично.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

3. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK = AC$. Найдите угол BKC.

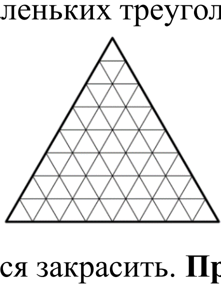
Ответ: 30°.

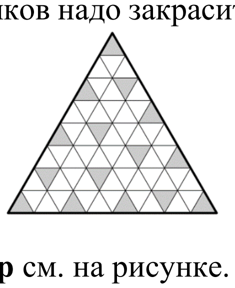


Решение. Проведем отрезки DK и BD. Треугольники BCK и DCK равны по двум сторонам и углу между ними ($BC = CD$, CK – общая, $\angle BCK = \angle DCK = 135°$). Тогда $DK = BK$. По условию $BK = AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, т. е. он равносторонний, и $\angle BKD = 60°$. $\angle BKC = \angle DKC$, а в сумме эти углы составляют угол в 60°, т. е. каждый из них равен 30°.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

4. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество маленьких треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?





Ответ: 15 треугольничков.

Решение. **Оценка.** Всего точек пересечения линий $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере $45 : 3 = 15$ треугольничков придется закрасить. **Пример** см. на рисунке.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2022 год

8 класс

1. Пусть a, b, c – произвольные ненулевые числа. Пусть $A = \frac{b^2+c^2}{a^2}$, $B = \frac{a^2+c^2}{b^2}$, $C = \frac{a^2+b^2}{c^2}$, $P = A \cdot B \cdot C$ и $S = A + B + C$. Какие значения может принимать выражение $P - S$?

Ответ: 2.

Решение. $P = A \cdot B \cdot C = \left(\frac{b^2+c^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2+c^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right) = \left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{c^2}{a^2}\right)\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{b^2}\right)\left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right) =$
$= \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}+1+\frac{b^2}{a^2}+\frac{a^2}{b^2}+1+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2} = S + 2$, тогда $P - S = 2$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Только ответ – 1 балл.

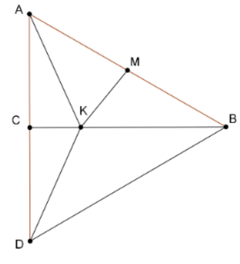
2. После футбольного турнира в один круг (то есть каждая команда играла с каждой ровно один раз), выяснилось, что:
   • каждая команда выиграла ровно 2 игры и проиграла ровно 2 игры (остальные матчи завершились вничью);
   • нет таких трёх команд ***А***, ***Б*** и ***В***, что команда ***А*** выиграла у команды ***Б***, команда ***Б*** выиграла у команды ***В*** и команда ***В*** выиграла у команды ***А***.
   Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире?

Ответ: 7 команд.

Решение. **Оценка.** Из первого условия команд не меньше 5.
Пусть участвовало 5 команд. Пусть команда ***А*** выиграла у команд ***Б*** и ***В***, а проиграла командам ***Г*** и ***Д***. Тогда команда ***Б*** может выиграть только у команды ***В***, чтобы не нарушилось второе условие, то есть, только у одной команды.
Пусть участвовало 6 команд. Пусть команда ***А*** выиграла у команд ***Б*** и ***В***, а проиграла командам ***Г*** и ***Д***. Тогда команда ***Б*** может выиграть только у команды ***В*** и оставшейся команды ***Е***, чтобы не нарушилось второе условие. Тогда команда ***В*** может выиграть только у команды ***Е***, то есть, только у одной команды.
Пример. Покажем, что для 7 команд такой турнир возможен. Пусть команды ***А***, ***Б***, ***В***, ***Г***, ***Д***, ***Е*** и ***Ж*** расставлены по кругу. Пусть каждая команда выиграла у двух, которые идут после неё, то есть ***Е*** выиграла у ***Ж*** и ***А***. Тогда каждая проиграла двум, которые идут перед ней. Остальные игры заканчиваются вничью. Тройки команд, нарушающих второе условие, нет. В этом можно убедиться на примере команды ***А***, для остальных всё аналогично.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

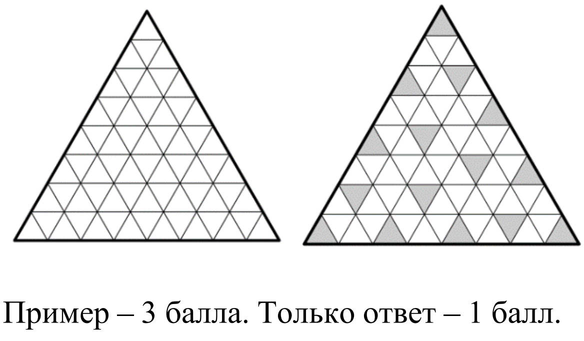
3. В треугольнике ABC с прямым углом C угол B равен 30°. Точка M – середина гипотенузы AB. На катете BC выбрана точка K так, что $AK + KM = BC$. Докажите, что MK и AB перпендикулярны.



Решение. Достроим до равностороннего треугольника ABD. Проведем отрезок DK. $DK = AK$ из равенства треугольников ACK и DCK. $BC = AK + KM = DK + KM$. Тогда высота BC равна медиане DM, а, значит, K лежит на высоте DM, тогда KM перпендикулярно AB.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

4. Равносторонний треугольник со стороной 8 разделили на равносторонние треугольнички со стороной 1 (см. рис.). Какое наименьшее количество маленьких треугольничков надо закрасить, чтобы все точки пересечения линий (в том числе и те, что по краям) были вершинами хотя бы одного закрашенного треугольничка?



Ответ: 15 треугольничков.

Решение. **Оценка.** Всего точек пересечения линий $1 + 2 + 3 + ... + 9 = 45$, а у треугольничка три вершины, так что по крайней мере $45 : 3 = 15$ треугольничков придется закрасить. **Пример** см. на рисунке.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Оценка – 3 балла. Пример – 3 балла. Только ответ – 1 балл.

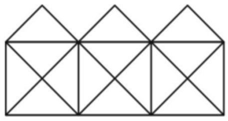
ЗАДАНИЯ 2 ТУРА:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

1 тур, 10 минут

Задача 1. Найдите наибольшее четное число, которое делится на 75 и не содержит в своей записи одинаковых цифр.

Ответ:

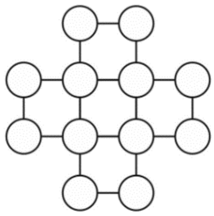


Задача 2. Аня рисует несколько фигурок в виде домика, каждую следующую прикладывая к предыдущей (на рисунке показано 3 домика). Всего она нарисовала 20 домиков. Сколько треугольников можно увидеть на рисунке Ани?

Ответ:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

2 тур, 10 минут



Задача 3. В ящике меньше 100, но больше 80 фруктов. При этом яблок в 2 раза меньше, чем всех остальных фруктов. А мандаринов в 4 раза меньше, чем всех остальных фруктов. На сколько яблок больше, чем мандаринов?

Ответ:

Задача 4. Расставьте числа от 1 до 12 (каждое по одному разу так, чтобы сумма четырех чисел в каждом из пяти квадратов была одинаковой.

Ответ:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

3 тур, 15 минут

Задача 5. Саша вычел из трехзначного числа произведение его цифр. Какой наибольший результат он мог получить?

Ответ:

Задача 6. Автомобиль двигался в одном направлении с непостоянной скоростью 2,5 часа. При этом за каждый промежуток в 1 час он проезжал ровно 40 км. Какая максимальная средняя скорость за все время при этом может быть у автомобиля?

Ответ:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

4 тур, 15 минут

Задача 7. Найдите все двузначные числа, которые равны сумме двух своих цифр и их произведения.

Ответ:

Задача 8. Мама и дочка чистили яблоки для компота. Всего они почистили 200 яблок. Мама чистит 3 яблока в минуту, а дочка только два. При этом дочка работала на 15 минут дольше. Сколько времени работала дочка?

Ответ:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

5 тур, 20 минут

Задача 9. Сколько среди дробей 100/2, 99/3, 98/4, …, 2/100 сократимых?

Ответ:

Задача 10. 2022 человека выписывали последовательности. Каждый начал с 1, первый писал каждое следующее число на 1 больше предыдущего, второй – на 2 больше предыдущего, и т.д. 2022-й – каждое следующее число на 2022 больше предыдущего. Сколько из этих людей написали число 2022?

Ответ:

Класс 5 – 6 Ф.И.____ Школа__________________

6 тур, 20 минут

Задача 11. На доске записано число 10000. За одно действие Вася изменяет число, написанное на доске, по следующему правилу: если это число делится на 3, то Вася вычитает из него 1; если число дает остаток 2 при делении на 3, то Вася вычитает из него 2; а если число дает остаток 1, то Вася прибавляет к нему 2. Какое число получит Вася, выполнив 2022 действия?

Ответ:

Задача 12. Назовем натуральное число *спартанским*, если в нем содержится ровно одна цифра «3» и ровно две цифры «0». Найдите количество *спартанских* чисел меньших 10000.

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.____Школа___________________

1 тур, 10 минут

Задача 1. За круглым столом сидело шесть человек. Каждый либо рыцарь, либо лжец. Пятеро заявили: «мои соседи однотипны». Сколько среди сидящих могло быть лжецов?

Ответ:

Задача 2. Решите уравнение $m! = n! + 600$. (Напомним, что $a!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до a).

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.____Школа___________________

2 тур, 10 минут

Задача 3. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить на доске 9×9 так, чтобы в любой четырёхклеточной фигуре было не более одной закрашенной клетки?

Ответ:

Задача 4. В треугольнике ABC угол C равен 35 градусов, а угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины B, равен 20 градусов. Чему равен угол A?

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.____Школа___________________

3 тур, 15 минут

Задача 5. В вершинах квадрата записали натуральные числа. На каждой стороне написали произведение чисел на её концах. Сумма четырех чисел на сторонах квадрата равна 2121. Чему может быть равна сумма чисел в его вершинах?

Ответ:

Задача 6. Периметр клетчатого многоугольника равен 22. Чему может быть равна его площадь? Найдите все значения.

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.____Школа___________________

4 тур, 15 минут

Задача 7. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Ответ:

Задача 8. Найдите все решения ребуса: ТИК + ТОК = ИКТ, где одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные.

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.____Школа___________________

5 тур, 20 минут

Задача 9. Назовем число *хорошим*, если его можно представить в виде суммы нескольких попарно различных целых неотрицательных степеней четверки (в том числе и одной степени). Первое такое число $4^0 = 1$, пятое число $4^0 + 4^2 = 17$. Найдите 50-е *хорошее* число.

Ответ:

Задача 10. Какое наименьшее натуральное число n удовлетворяет условию: $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится на 1000?

Ответ:

Класс 7 – 8 Ф.И.___________________________Школа______________

6 тур, 20 минут

Задача 11. Найдите максимальное значение суммы: FANTOM + OF + THE + OPERA (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры).

Ответ:

Задача 12. Сколькими способами можно пометить некоторые единичные кубики куба 5×5×5 так, чтобы среди пяти подряд идущих кубиков в любом из трех направлений было четное число помеченных?

Ответ:

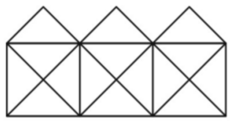
ОТВЕТЫ:
Математический экспресс-2022, 5-6 класс

1 тур, 10 минут

Задача 1. Найдите наибольшее четное число, которое делится на 75 и не содержит в своей записи одинаковых цифр.

Ответ: **9876432150**.

Задача 2. Аня рисует несколько фигурок в виде домика, каждую следующую прикладывая к предыдущей (на рисунке показано 3 домика). Всего она нарисовала 20 домиков. Сколько треугольников можно увидеть на рисунке Ани?



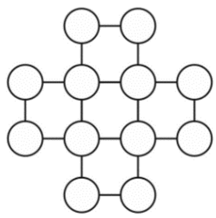
Ответ: **236.**

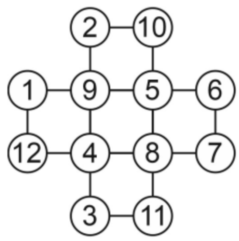
2 тур, 10 минут

Задача 3. В ящике меньше 100, но больше 80 фруктов. При этом яблок в 2 раза меньше, чем всех остальных фруктов. А мандаринов в 4 раза меньше, чем всех остальных фруктов. На сколько яблок больше, чем мандаринов?

Ответ: **на 12.**

Задача 4. Расставьте числа от 1 до 12 (каждое по одному разу так, чтобы сумма четырех чисел в каждом из пяти квадратов была одинаковой.





Ответ: **пример проверять.**

3 тур, 15 минут

Задача 5. Саша вычел из трехзначного числа произведение его цифр. Какой наибольший результат он мог получить?

Ответ: **990.**

Задача 6. Автомобиль двигался в одном направлении с непостоянной скоростью 2,5 часа. При этом за каждый промежуток в 1 час он проезжал ровно 40 км. Какая максимальная средняя скорость за все время при этом может быть у автомобиля?

Ответ: **48 км/ч.**

4 тур, 15 минут

Задача 7. Найдите все двузначные числа, которые равны сумме двух своих цифр и их произведения.

Ответ: **19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89, 99.**

Задача 8. Мама и дочка чистили яблоки для компота. Всего они почистили 200 яблок. Мама чистит 3 яблока в минуту, а дочка только два. При этом дочка работала на 15 минут дольше. Сколько времени работала дочка?
Ответ: **49 минут.**

5 тур, 20 минут
Задача 9. Сколько среди дробей 100/2, 99/3, 98/4, …, 2/100 сократимых?
Ответ: **69.**

Задача 10. 2022 человека выписывали последовательности. Каждый начал с 1, первый писал каждое следующее число на 1 больше предыдущего, второй – на 2 больше предыдущего, и т.д. 2022-й – каждое следующее число на 2022 больше предыдущего. Сколько из этих людей написали число 2022?
Ответ: **4.**

6 тур, 20 минут
Задача 11. На доске записано число 10000. За одно действие Вася изменяет число, написанное на доске, по следующему правилу: если это число делится на 3, то Вася вычитает из него 1; если число дает остаток 2 при делении на 3, то Вася вычитает из него 2; а если число дает остаток 1, то Вася прибавляет к нему 2. Какое число получит Вася, выполнив 2022 действия?
Ответ: **6971.**

Задача 12. Назовем натуральное число *спартанским*, если в нем содержится ровно одна цифра «3» и ровно две цифры «0». Найдите количество *спартанских* чисел меньших 10000.
Ответ: **49.**

Математический экспресс-2022, 7-8 класс

1 тур, 10 минут
Задача 1. За круглым столом сидело шесть человек. Каждый либо рыцарь, либо лжец. Пятеро заявили: «мои соседи однотипны». Сколько среди сидящих могло быть лжецов?
Ответ: **0 и 4.**

Задача 2. Решите уравнение $m! = n! + 600$. (Напомним, что $a!$ – это произведение всех натуральных чисел от 1 до a).
Ответ: $\boldsymbol{m = 6, n = 5}$**.**

2 тур, 10 минут
Задача 3. Какое наибольшее количество клеток можно закрасить на доске 9×9 так, чтобы в любой четырёхклеточной фигуре было не более одной закрашенной клетки?
Ответ: **13.**

Задача 4. В треугольнике ABC угол C равен 35 градусов, а угол между биссектрисой и высотой, проведенными из вершины B, равен 20 градусов. Чему равен угол A?
Ответ: **75°.**

3 тур, 15 минут
Задача 5. В вершинах квадрата записали натуральные числа. На каждой стороне написали произведение чисел на её концах. Сумма четырех чисел на сторонах квадрата равна 2121. Чему может быть равна сумма чисел в его вершинах?
Ответ: **710, 310, 122.**

Задача 6. Периметр клетчатого многоугольника равен 22. Чему может быть равна его площадь? Найдите все значения.
Ответ: **10, 11, 12, 13, 14, …, 30.**

4 тур, 15 минут
Задача 7. Найдите наименьшее натуральное число, дающее попарно различные остатки при делении на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.
Ответ: **1799.**

Задача 8. Найдите все решения ребуса: ТИК + ТОК = ИКТ, где одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные.
<u>*Ответ:*</u> **246 + 216 = 462, 251 + 261 = 512, 492 + 432 = 924.**

<u>5 тур, 20 минут</u>

Задача 9. Назовем число *хорошим*, если его можно представить в виде суммы нескольких попарно различных целых неотрицательных степеней четверки (в том числе и одной степени). Первое такое число $4^0 = 1$, пятое число $4^0 + 4^2 = 17$. Найдите 50-е *хорошее* число.
<u>*Ответ:*</u> **1284.**

Задача 10. Какое наименьшее натуральное число n удовлетворяет условию: $n^3 + 3n^2 + 2n$ делится на 1000?
<u>*Ответ:*</u> **124.**

<u>6 тур, 20 минут</u>

Задача 11. Найдите максимальное значение суммы: FANTOM + OF + THE + OPERA (одинаковые буквы – одинаковые цифры, разные буквы – разные цифры).
<u>*Ответ:*</u> **1062309.**

Задача 12. Сколькими способами можно пометить некоторые единичные кубики куба 5×5×5 так, чтобы среди пяти подряд идущих кубиков в любом из трех направлений было четное число помеченных?
<u>*Ответ:*</u> **2^{64}.**