Личное первенство по математике «Математический фейерверк» 2019-2020 г.

5-6 классы

1. *Отличник Петя написал на доске верный пример $A + B - C - D = E$ (где буквами A, B, C, D и E обозначены различные цифры), а хулиган Вася записал такой же пример, но все цифры у него оказались в обратном порядке: $E + D - C - B = A$. При этом у Васи все равно получилось верное равенство. Придумайте такой пример.*

Ответ: 5 + 6 – 0 – 3 = 8 (обязательно C = 0, остальные – какие угодно разные цифры, при которых выполняется равенство.

Решение. Если сложить два равенства, получим $A + E - 2C = A + E$, откуда $C = 0$. Остальные цифры можно взять произвольно с условием, что они разные и выполняется равенство.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Только доказано, что C=0 – 3 балла. Только написано, что C=0 – 1 балл. Неверный пример (совпадающие цифры, ошибка в счёте) – 0 баллов.

2. *Мама дала Ане, Боре и Васе поровну денег. Аня на все свои деньги купила 5 леденцов, 15 ирисок и 1 шоколадку. Боря на все свои деньги купил 2 леденца, 6 ирисок и 4 шоколадки. Вася же все свои деньги потратил на шоколадки. Сколько шоколадок у него оказалось? Ответ надо обосновать.*

Ответ: 6 шоколадок.

Решение. 5Л + 15И + Ш = 2Л + 6И + 4Ш. Отсюда 3Л + 9И = 3Ш, то есть Ш = Л + 3И. Тогда 2Л + 6И = 2Ш, а 2Л + 6И + 4Ш = 2Ш + 4Ш = 6Ш.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов. Любое количество примеров, при которых получается 6 шоколадок, без доказательства, приравнивается к случаю «только ответ».

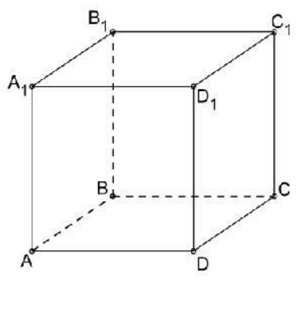
3. *По кругу записаны 14 натуральных чисел. Сумма любых четырёх чисел, стоящих подряд, равна 60. Докажите, что каждое из этих чисел меньше 30.*

Решение. Обозначим одно из чисел буквой a. Тогда по кругу от неё на 5, 9, 13 местах тоже стоит a (чтобы при сдвиге на 1 число сумма оставалась 60). Продолжая движение по кругу, получаем, что на 3, 7, 11 местах также стоит число a. Таким образом, все места через одно заняты числом a. А налогично, остальные числа равны. Обозначим их буквой b. Тогда $2a + 2b = 60$, откуда $a + b = 30$. Если бы одно из этих чисел было больше или равно 30, тогда второе было бы меньше либо равно 0, что противоречит условию (числа натуральные).

Критерии. Доказано, что все цифры через три одинаковые – 1 балл. Доказано, что все числа через одно, одинаковые – 2 балла. Доказано, что всего два чередующихся числа – 3 балла. Доказано, что сумма любых двух соседних равна 30 – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.

4. *Сколькими способами можно покрасить вершины куба в красный или синий цвета так, чтобы цвет каждой вершины совпадал с цветом большинства ее соседей? Способы считаются различными, если хотя бы одна вершина покрашена в другой цвет. Ответ надо обосновать.*

Ответ: 8 способов.



Решение. Если все вершины одноцветные – 2 способа (все синие или все красные). Пусть есть два цвета. Пусть вершина A – синяя. Если все её соседи синие, то есть A_1, B, D, то B_1 – тоже синяя (2 соседа), аналогично D_1 и C – тоже синие, тогда и C_1 – синяя.

Противоречие. Значит, у вершины A только два синих соседа. Пусть это B и D. Тогда C – тоже синяя. A_1 – красная, значит, у неё хотя бы два красных соседа, то есть, B_1 и D_1 – красные. Тогда и C_1 – красная. Таким образом, все вершины в одной грани синие, а в противоположной – красные. Выбрать синюю грань можно 6-ю способами. Значит, всего, учитывая одноцветные случаи, 8 способов.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Доказано, что если есть два цвета, то в одной грани – все вершины синие, а в противоположной – все красные – 2 балла, этот факт без обоснования – 1 балл (за правильный ответ в этих случаях добавляется 1 балл). Если при полном объяснении двухцветного случая нет упоминания об одноцветном – отнимается 2 балла (то есть 5 баллов). Полное решение – 7 баллов.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк» 2019-2020 г.

7-8 классы

1. *Два числа a и b таковы, что сумма двух обратных им чисел равна 1. Каждое из чисел a и b уменьшили на 1. Докажите, что одно из получившихся чисел обратно другому.*

Решение. По условию $\frac{1}{\ } + \frac{1}{\ } = 1$. Тогда $a + b = ab$, то есть, $ab - a - b = 0$. Рассмотрим произведение получившихся после уменьшения на 1 чисел $(a - 1)(b - 1) = ab - a - b + 1 = 0 + 1 = 1$. Значит, получившиеся числа взаимнообратны, $- 1 = \frac{1}{\ - 1}$.

Критерии. Получено условие а+б=аб – 1 балл. Получено условие (а-1)(б-1)=аб-а-б+1 – 1 балл. Получены оба условия – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

2. *В классе 10 шахматистов. Они сыграли несколько партий в шахматы (каждая пара сыграла не более одной партии). Может ли так быть, что один человек сыграл 9 партий, двое – по 8 партий, двое – по 5 партий, четверо – по 3 партии, один – 1 партию?*

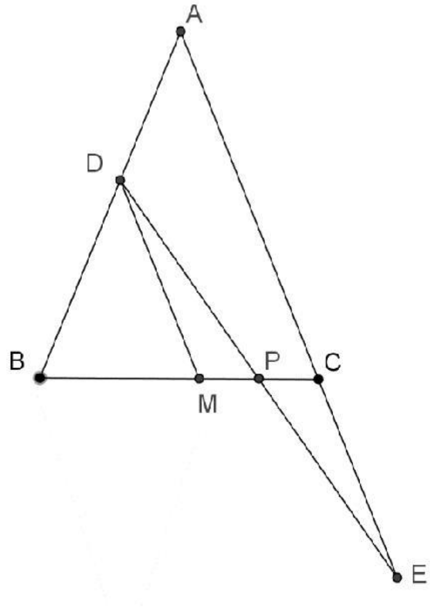
Ответ: нет.

Решение. Пусть такое возможно. Каждый сыграл не более 9 партий. Значит, один (назовем его A) сыграл все партии, а один – только с ним. Значит, остальные сыграли не более 8 партий. Значит, двое из них (назовем их B и C) сыграли со всеми оставшимися и с A. Тогда сыгравшие по 3 партии играли только с A, B и C. Осталось рассмотреть тех, кто сыграл 5 партий. Они могли играть только с A, B, C и между собой – по 4 партии. Не получается по 5 партий. Противоречие.

Критерии. Только ответ «нет» - 0 баллов. Полное решение – 7 баллов.

3. *Дан равнобедренный треугольник ABC (AB = AC). На стороне AB и на продолжении стороны AC за точку C отмечены точки D и E соответственно так, что BD = CE. Отрезки DE и BC пересекаются в точке P. Докажите, что PD = PE.*

Решение. В треугольнике ABC углы B и C равны. Проведём через точку D прямую, параллельную стороне AC. Точку пересечения обозначим M. $\angle DMB = \angle C$ (соответственные углы при пересечении параллельных прямых DM и AC прямой BC). Тогда $\angle DMB = \angle B$, треугольник BDM – равнобедренный, $DM = BD = CE$. Рассмотрим треугольники DMP и ECP. $DM = CE$ (как уже доказано), $\angle MDP = \angle PEC$ (внутренние накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых DM и AC прямой DE), $\angle DMP = \angle ECP$ (внутренние накрест лежащие углы при



пересечении параллельных прямых *DM* и *AC* прямой *BC*). Треугольники *DMP* и *ECP* равны по стороне и двум прилежащим углам. Тогда *PD* = *PE*.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.
Критерии. Любой

4. На доске написано число 53. Двое играют в следующую игру, делая ходы по очереди. За ход разрешается увеличить или уменьшить любую цифру на 1. Проигрывает тот, кто получит число, уже встречавшееся ранее на доске. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его соперник? (Девятку можно заменить только на восьмерку. Ноль – только на единицу. Заменять первую цифру на ноль нельзя).

Ответ: Выигрывает первый игрок.

Решение. Записываем все числа на прямоугольной доске – одна строка – числа из одного десятка. Получаем таблицу 9×10. Ставим в клетку 53 фишку. Ходы возможны только в соседнюю по стороне клетку. Разбиваем доску на горизонтальные доминошки. Стратегия первого игрока – ходить во вторую клетку доминошки, в которой находится фишка (то есть первый ход – в клетку 52). Таким образом, второй игрок всегда делает ход в новую доминошку. У первого игрока всегда есть ответный ход. Так как игра конечна, с каждым ходом остается на одну незатронутую клетку меньше, то второй игрок проигрывает.

Критерии. Только ответ – 0 баллов. Полное решение – 7 баллов. Если приведена верная стратегия, но не обосновано, что она приводит к победе – 3 балла. Если про стратегию не понятно, что она выигрышная – 0 баллов.

Математический экспресс 2019-2020 г.

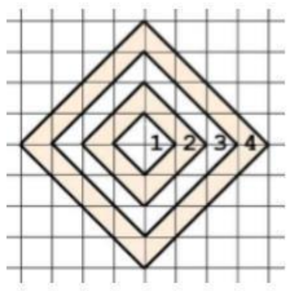
5-6 классы

1 тур

Задача 1. Алексей написал все трехзначные числа, которые имеют следующее свойство: если поделить первую цифру числа на вторую и возвести результат деления в квадрат, то получится третья цифра. Сколько чисел написал Алексей? *Ответ:* **16.**

Задача 2. Мишень состоит из 2020 областей, первые четыре показаны на рисунке, следующие области строятся аналогично. Какова площадь 20-ой области, если площадь одного квадратика равна 1 см^2?

Ответ: **78.**



2 тур

Задача 3. В семье четверо детей, им 4, 8, 12 и 14 лет, а зовут их Федя, Аня, Таня и Маша. Одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Феди, а сумма лет Ани и Тани делится на три. Сколько лет Ане?

Ответ: **14.**

Задача 4. Винни-Пух и Пятачок ели мед. Пятачок ел втрое медленнее Винни Пуха, но начал есть на 4 минуты раньше. В итоге им досталось меда поровну. За сколько минут Пятачок съел бы мед в одиночку?

Ответ: **12.**

3 тур

Задача 5. На планете Плюм живут лямзики, зямзики, зюмзики. У лямзиков по 4 глаза, у зямзиков – по 3, а у зюмзиков – по 2. Однажды несколько жителей планеты собрались на

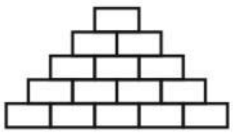
вечеринку. Зямзиков пришло в два раза меньше, чем зюмзиков. Какое наибольшее число лямзиков могло придти на вечеринку, если всего у всех пришедших было 129 глаз?
<u>*Ответ:*</u> **27.**

Задача 6. Число 2020 обладает интересным свойством: первая цифра – 2 – равна количеству нулей в этом числе, вторая цифра – 0 – равна количеству единиц, третья цифра – 2 – равна количеству двоек, и четвертая цифра – 0 – равна количеству троек. Найдите все четырехзначные числа, обладающие таким свойством, кроме самого числа 2020.
<u>*Ответ:*</u> **1210.**

<u>***4 тур,***</u>
Задача 7. Вова и Даша живут в доме-небоскребе с одним подъездом, в котором на каждом этаже 10 квартир. Номер этажа Вовы равен номеру квартиры Даши. Сумма номеров их квартир равна 2020. На каком этаже живет Вова?
<u>*Ответ:*</u> **184.**

Задача 8. На левой чаше весов лежат серебряные монеты, а на правой – золотые, всего 195 монет, и весы находятся в равновесии. Если с левой чаши убрать 11 монет, и переложить с правой на левую две монеты, то весы снова будут в равновесии. Все серебряные монеты весят одинаково между собой, все золотые – тоже. Сколько золотых монет было на весах изначально?
<u>*Ответ:*</u> **52.**

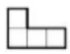
<u>***5 тур***</u>
Задача 9. Каменщик Толя строит пирамиду из кирпичей. В каждом следующем ряду на один кирпич меньше, чем в предыдущем, а в самом верхнем ряду – один кирпич (пример на рисунке). Высота кирпича – 27 см, а длина – 40 см. Сколько кирпичей использовал Толя, если периметр получившейся пирамиды равен 2010 см?



<u>*Ответ:*</u> **120.**

Задача 10. Назовем число простых множителей натурального числа *n*, произведение которых равно заданному натуральному числу *n*, «длина числа *n*». Например, длина числа 90=2×3×3×5 равна 4. Сколько из чисел меньше 100 имеют длину 3?
<u>*Ответ:*</u> **22.**

<u>***6 тур***</u>
Задача 11. Какую наименьшую площадь может иметь клетчатый прямоугольник, который можно разрезать без остатка

на одну фигурку вида  и несколько фигурок вида ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.
<u>*Ответ:*</u> **21.**

Задача 12. Расстояние между домиками Кроша и Бараша 1 км и 600 м. Крош вышел из своего домика в 12 часов 18 минут
7 пришел в гости к Барашу в 15 часов 30 минут. А Бараш вышел из своего домика в 11 часов 00 минут и по той же дороге пришел в гости к Крошу в 13 часов 40 минут. Крош и Бараш одновременно подошли к мосту через речку, каждый со своей стороны. Крош ушел с моста на минуту позже Бараша. Какова длина моста в метрах?
<u>*Ответ:*</u> **50.**

Математический экспресс 2019-2020 г.

7-8 классы

<u>1 тур</u>

Задача 1. Винни-Пух и Пятачок ели мёд. Пятачок ест вчетверо медленнее Винни-Пуха, но начал есть на 4 минуты раньше. В итоге им досталось меда поровну. За какое время (в секундах) Пятачок съел бы мёд в одиночку?

<u>Ответ:</u> **640.**

Задача 2. В автобусе едет 53 человека: мужчины, женщины, девочки и мальчики. Женщин втрое больше, чем мальчиков

3на 10 больше, чем девочек. Мужчин и мальчиков в сумме 15. Сколько в автобусе едет девочек?

<u>Ответ:</u> **14.**

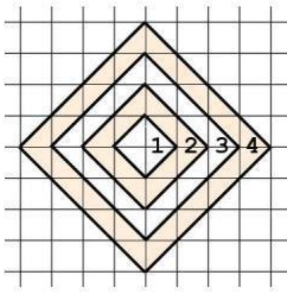
<u>2 тур</u>

Задача 3. На доске написано три двузначных числа, одно из которых начинается на 5, второе – на 6, а третье – на 7. Саша, Даша и Паша выбрали по два из этих чисел и сложили их. У Саши получилось 147, а результаты Даши и Паши – различные трехзначные числа, начинающиеся на 12. Найдите среднее по величине число.

<u>Ответ:</u> **69.**

Задача 4. У Вильгельма Телля есть мишень, разделенная на 13 областей. Первые четыре из них показаны на рисунке (обозначены номерами). Следующие области строятся аналогично. Очки за попадание в область обратно пропорциональны ее площади. Сколько очков дает попадание в тринадцатую область, если попадание в восьмую область дает 2020 очков?

<u>Ответ:</u> **1212.**



<u>3 тур</u>

Задача 5. Бочка объемом 64 литра наполнена молоком. После того, как 16 литров было продано, бочку долили водой до полной и тщательно перемешали смесь. После этого

продали еще 16 литров смеси, и бочку снова долили водой и перемешали. После этого снова продали еще 16 литров, и бочку опять долили водой и перемешали. Сколько процентов смеси составляет молоко? Ответ округлите до целого. *<u>Ответ:</u>* **42.**

Задача 6. Крош и Бараш катаются на велосипедах, каждый – со своей скоростью. Если они находятся на расстоянии 40 км друг от друга и движутся навстречу друг другу, то они встречаются через час. Если же Крош находится в 30 км от Бараша и догоняет его, то ему потребуется на это 3 часа 45 минут. Найдите скорость Кроша в км/ч.

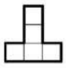
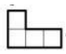
<u>Ответ:</u> **24.**

<u>4 тур</u>

Задача 7. Назовем длиной натурального числа N количество сомножителей (необязательно различных) в разложении N на простые множители. Например, длина числа 90 равна 4, так как $90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Сколько нечетных чисел, меньших 200, имеют длину 3?

<u>Ответ:</u> **14.**

Задача 8. Какую наименьшую площадь может иметь клетчатый прямоугольник, который можно разрезать без остатка

на одну фигурку вида  и несколько фигурок вида ? Фигурки можно поворачивать и переворачивать.
<u>*Ответ:*</u> **45.**

<u>5 тур</u>

Задача 9. Сколько четырехзначных делителей имеет число 2020^2?
<u>*Ответ:*</u> **7.**

Задача 10. За время существования метеорологической службы на 90% всех дней приходилась ясная погода. Метеорологи за все это время предсказывали верную погоду в 76 случаях из 100, причем в 80% всех случаев, когда на день приходилась ясная погода, предсказания метеорологов сбывались. Какую долю среди пасмурных дней составляют те, в которые метеорологи предсказали правильную погоду (в процентах)?
<u>*Ответ:*</u> **40.**

<u>6 тур</u>

Задача 11. Сколько существует пар $(x;\ y)$ целых чисел таких, что $x \le y$ и что их произведение равно их сумме, умноженной на 5?
<u>*Ответ:*</u> **4.**

Задача 12. Клетки доски 6×10 (6 горизонталей, 10 вертикалей) покрашены в шахматном порядке. Фигура кузнечик бьет все клетки своей вертикали, имеющие тот же цвет, что и клетка, на которой она стоит, а также все клетки своей горизонтали, имеющие противоположный цвет. (Чтобы побить какую-то клетку, кузнечик может перепрыгивать через другие фигуры.) Какое наибольшее число не бьющих друг друга кузнечиков можно расставить на этой доске?
<u>*Ответ:*</u> **20.**