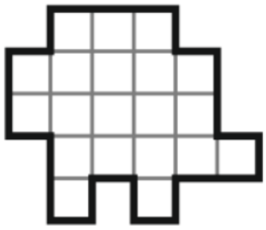
Турнир математических боёв № 1 А

1. Запись 22.03 можно прочитать как 22 марта или как двадцать два часа и три минуты. Сколько всего дат в 2020 году, которые можно прочитать такими двумя способами?
2. Музей математики работает по нечетным числам месяца, по средам, по субботам, а также в дни, равные номеру месяца (например, 3 марта). Могло ли когда-то так оказаться, что музей работал 10 дней подряд?
3. Разрежьте фигуру по сторонам клеток на четыре равные части. Части считаются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.



4. Решите ребус АИСТ + АИСТ + АИСТ + АИСТ = СТАЯ.
5. Существуют ли такие 4 различных натуральных числа, что при увеличении каждого из них на 1 произведение всех четырех увеличится в 3 раза?
6. Только что закончился 2019-й год. В его записи использовались четыре цифры: 2, 0, 1, 9. Сколько раз в будущем номер года будет записываться теми же четырьмя цифрами?

Турнир математических боёв № 1 В

1. Вова хочет вырезать из доски 5□5 одну клетку, а все оставшиеся обойти ходом шахматного коня, побывав в каждой ровно по одному разу. Возможно ли это?
2. Вова разрезал квадрат на три прямоугольника периметра 80 каждый. Дима тоже разрезал этот квадрат на три прямоугольника одинакового периметра. Какого? Перечислите все возможности.
3. На доске написано 10 натуральных чисел, больших 10. За одну операцию можно взять два написанных числа, одно из них умножить на 2, а из другого вычесть 2 и написать полученные числа вместо взятых (числа не обязаны оставаться положительными). Докажите, что за несколько таких операций можно сделать все числа равными.
4. Найдите наименьшее натуральное число, которое для любой цифры (от 0 до 9) имеет делитель, оканчивающийся этой цифрой.
5. Решите ребус КОРОВА + ТРАВА = МОЛОКО.
6. Сколькими способами прямоугольник 3□5 можно разрезать на прямоугольники 1□3?

Турнир математических боёв № 1 С

1. Докажите, что выражение 1009! · 1010! · 2019! · 2020! не является квадратом натурального числа. (по определению $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$).
2. Из бумаги вырезан правильный шестиугольник, то есть выпуклый шестиугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. Можно ли, складывая его по прямым линиям, получить правильный шестиугольник, у которого площадь в три раза меньше площади исходного шестиугольника?
3. На именины бабушки Зины пришло 16 гостей. Оказалось, что присутствующие съели 130 конфет, причем девочки съели по 13 штук, мальчики – по 5, взрослые гости – по 4, а сама бабушка Зина – 17. Сколько было среди гостей девочек, мальчиков и взрослых?
4. Петя утверждает, что два спинера дороже пяти мороженых, Вася – что три спинера дороже восьми мороженых. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спинеров дороже 19 мороженых?
5. Рассмотрим четыре последовательных числа n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$. Для каких n НОК первых трех чисел больше, чем НОК последних трех?
6. Сумма 65 чисел равна 2015. Когда самое большое из них увеличили в три раза, а другое уменьшили на 62, сумма всех чисел не изменилась. Найдите наименьшее среди исходных чисел.

Турнир математических боёв № 2 А

1. Вася сбегает с пятого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Марк едет на лифте. Марк едет на лифте с пятого этажа на первый на 2 секунды быстрее, чем Вася сбегает с шестого этажа на первый. За сколько секунд Вася сбегает с пятого этажа на первый? (Длины пролетов лестницы между всеми этажами одинаковы).

2. Можно ли расставить по кругу числа 1, 2, …, 8 так, чтобы ни у каких двух чисел, стоящих рядом, сумма не делилась ни на 3, ни на 5, ни на 7?
3. Согласно древней легенде монстр Бабай всякий раз, когда просыпается, проглатывает школьника, решившего меньше всего задач и сразу после этого засыпает. После этого он спит количество лет, равное сумме цифр года, в котором он проснулся. Первого школьника Бабай проглотил в 234 году нашей эры. В каком году ждать его ближайшее пробуждение в будущем?
4. У Васи есть палочки длиной 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?
5. У ведьмы есть капсулы с омолаживающим порошком, весом 180, 181, 182, …, 200 миллиграммов (по одной каждого веса). Чтобы обрести бессмертие, нужно выпить 1 грамм омолаживающего порошка. (Открывать капсулы небезопасно, нужно глотать их целиком). Докажите, что ведьма не сможет жить вечно.
6. Флорист Стёпа решил посадить вдоль забора 25 цветов – ирисы и маки. Стёпа считает нельзя сажать два мака подряд и рядом с каждым ирисом должен быть посажен ещё хотя бы один ирис. Стёпа посадил 9 маков. Мог ли тринадцатый цветок оказаться ирисом?

Турнир математических боёв № 2 B

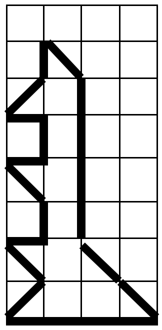
1. В любом ли шестизначном числе, все цифры которого различны, можно зачеркнуть одну цифру так, чтобы оставшееся пятизначное число делилось на 3?
2. В словах ДЕНЬ, НОЧЬ, СВЕТ, ТЕНЬ буквы заменены цифрами, причём одинаковые буквы одинаковыми цифрами, а разные – разными. Получилось 4 числа, только, может быть, записанные в другом порядке: 1834, 2014, 6014, 9506. А какое число получится при такой замене из слова ОТВЕТ?
3. Десятиножка купила на базаре 10 носков: несколько правых и несколько левых (не обязательно поровну). Если бы она купила 10 правых носков, то потратила бы на 28 рублей больше. Если бы купила 10 левых носков, то потратила бы на 12 рублей меньше. Сколько у Десятиножки левых ног, а сколько правых, если она смогла обуться в новые носки?
4. На прямой отмечено несколько точек. Выбрав одну из них, Федя подсчитал число отрезков с концами в других отмеченных точках, на которых она лежит. Получилось 80 отрезков. Проделав то же самое с другой отмеченной точкой, он получил 90 отрезков. Сколько точек было отмечено на прямой?
5. Приведите пример клетчатой фигуры, которую можно по границам клеток разрезать на одинаковые трехклеточные фигуры, а можно – на одинаковые четырёхклеточные фигуры, но нельзя разрезать на двухклеточные фигуры (доминошки).
6. Расположите числа от 1 до 11 по кругу так, чтобы разность между двумя любыми соседними числами была равна 2 или 3.

Турнир математических боёв № 2 C

1. Известно, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BAC = \angle BDA$, $AD = 20$, $CD = 6$ и $\angle BAD = \angle ADC = 60°$. Найдите длину AB.
2. Можно ли на окружности расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 так, чтобы сумма любых трёх соседних чисел была больше 13?
3. На столе лежат фишки пронумерованные от 1 до 55. Можно ли разложить их на 13 кучек так, чтобы в каждой группе произведение чисел на фишках делилось на 9?
4. Петя и Вася играют в «Захватчиков» на квадратном поле 7×7. Они поочерёдно захватывают клеточки: Петя ставит крестик на любую незанятую клетку, Вася ставит два нолика на любые две незанятые соседние по стороне клетки. Если перед ходом Васи на поле не осталось пары незанятых соседних клеток, то все оставшиеся клетки достаются Пете. Кто из игроков сможет «захватить» больше половины всей доски вне зависимости от действий соперника?
5. Сколько существует пар натуральных чисел a и b таких, что НОК(a, b) = НОД$(a, b) + 17$?
6. Сумма четырёх различных наименьших делителей некоторого числа A равна 15. На сколько нулей может оканчиваться число A?

Турнир математических боёв № 3 А

1. Вдоль автотрассы расположены 40 кафе. Хозяин каждого из них посчитал сумму расстояний до оставшихся заведений. Возможно ли такое, что у всех получились различные числа?
2. В классе 26 учащихся. Они договорились, что каждый из них будет либо лжецом (лжецы всегда лгут), либо рыцарем (рыцари всегда говорят правду). Когда они пришли в класс и сели за парты, каждый из них сказал: «Я сижу рядом с лжецом». Затем некоторые учащиеся пересели за другие парты. Мог ли после этого каждый сказать: «Я сижу рядом с рыцарем»? Каждый раз за любой партой сидело ровно двое учащихся.
3. В ребусе разные цифры обозначают разными буквами, а одинаковые цифры – одинаковыми. Найдите максимально возможное значение выражения: МАТЕМ + АТИКА.
4. Неизвестное число делится ровно на четыре числа из набора 6, 15, 20, 21, 70. Определите, на какие именно числа оно делится.
5. Разрежьте фигуру на рисунке на 6 треугольников.
6. Федя составил из маленьких кубиков $1\times1\times1$ большой куб $3\times3\times3$ и покрасил три его грани в синий цвет, а три другие – в красный. Оказалось, что среди маленьких кубиков нет ни одного с тремя синими гранями. У скольких маленьких кубиков есть и синяя, и красная грани?



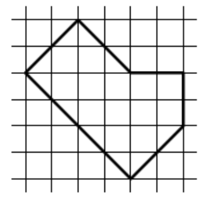
Турнир математических боёв № 3 В

1. В классе 14 девочек. Каждую из них спросили, сколько ее одноклассниц имеют такое же имя, как она, а также спросили, сколько ее одноклассниц имеют такую же фамилию, как она. Среди всех двадцати восьми ответов встретились все числа от 0 до 6. Докажите, что какие-то две девочки имеют одинаковые имена и фамилии.
2. В некотором треугольнике все углы различны и каждый измеряется целым числом градусов. Федя сложил самый маленький и самый большой углы. Какой самый маленький результат он мог получить?
3. В чемпионате Бразилии по хоккею за победу дают 6 очков, за ничью 3 очка, а за поражение 1 очко. Шесть хоккейных команд сыграли однокруговой турнир и набрали соответственно 22, 21, 17, 15, 14 и 12 очков. Сколько ничьих было в турнире?
4. В ящике лежат целые числа. Какое наименьшее количество чисел надо наугад вынуть из ящика, чтобы сумма квадратов каких-то трёх из них делилась на три?
5. Миша загадал 3 различных двузначных числа, сумма двух любых из которых равна третьему, записанному наоборот. Какие это числа, если известно, что одно из них превосходит сумму двух остальных?
6. Рабочие укладывали пол размера $n\times n$ плитками двух типов: 2×2 и 3×1. Оказалось, что им удалось полностью уложить пол так, что было использовано одинаковое количества плиток каждого типа. При каких n такое могло получиться? (Резать плитки, а также накладывать их друг на друга нельзя).

Турнир математических боёв № 3 С

1. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны 2, а высота, опущенная из вершины A, равна. Какими могут быть углы треугольника?
2. Выпуклый многоугольник, у которого n^2 сторон ($n > 2$), разрезали на n пятиугольников. Чему равно n?
3. Какое наименьшее число уголков из 3 клеток нужно покрасить в квадрате 6×6 так, чтобы больше ни одного уголка покрасить было нельзя? (Покрашенные уголки не должны перекрываться.)
4. Назовём натуральное число *хорошим*, если оно равно произведению некоторого натурального числа на сумму его цифр. Остальные натуральные числа назовем *плохими*. Каких чисел больше среди всех натуральных чисел от 1 до 20 202 020 – хороших или плохих?
5. На клетчатой доске 2020×2020 закрасили n доминошек. Оказалось, что в каждой строке и в каждом столбце есть хотя бы одна закрашенная клетка. При каком наименьшем n это возможно?
6. Разность между шестизначным числом $\overline{abcdef}$ и числом $\overline{fdebca}$ делится нацело на 271. Докажите, что $b = d$, $c = e$.

Личная олимпиада 4-6 классы



1. Можно ли заменить звездочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все восемь цифр были различными: ** + *** = 560?
2. В таблице 3×3 стоят числа от 1 до 9. В левом столбце стоят числа 1, 3, 4 в каком-то порядке, сумма чисел в среднем столбце равна 24. Какое число стоит в правом верхнем углу, если сумма чисел в верхней строке равна 19? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.
3. Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.
4. На острове рыцарей и лжецов живут шесть жителей, которые разбились на пары. Каждого человека в каждой паре спросили, сколько лжецов в вашей паре. И все ответы оказались одинаковые. После этого всех их разбили на пары по-другому и задали тот же вопрос и получили ответы: 0, 0, 1, 1, 2, 2 в каком-то порядке. Сколько рыцарей и сколько лжецов могло быть на острове? Ответ надо обосновать.
5. Тимофей раскрасил клетки таблицы 4 × 4 в три цвета так, что каждая клетка имеет общие стороны с клетками двух других цветов. Докажите, что клеток каждого цвета не меньше четырех.

Личная олимпиада 7-8 классы

1. На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 21 раз, а другое уменьшили на 2020, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.
2. Известно, что $a^2 + b^2 = 2{,}5ab$ и $a \neq b$. Вычислите значение выражения $\frac{a+b}{a-b}$.
3. Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?
4. Дано число 2020. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом?
5. Восемь шахматистов играют турнир в один круг (каждый должен сыграть с каждым по одному разу). В какой-то момент главный судья заметил, что первый шахматист сыграл одну партию, второй – две, третий – три, …, седьмой – семь. Какое наименьшее количество партий мог сыграть к этому времени восьмой шахматист?

РЕШЕНИЯ

Личная олимпиада 4-6 классы

1. *Можно ли заменить звездочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все восемь цифр были различными: ** + *** = 560?*

Ответ: Да. Например, 79 + 481 = 560. Возможны другие решения.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов.

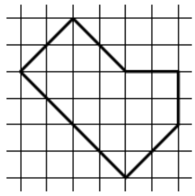
2. *В таблице 3×3 стоят числа от 1 до 9. В левом столбце стоят числа 1, 3, 4 в каком-то порядке, сумма чисел в среднем столбце равна 24. Какое число стоит в правом верхнем углу, если сумма чисел в верхней строке равна 19? Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.*

Ответ: 6.

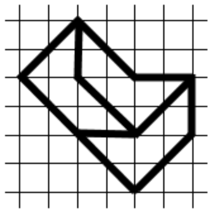
Решение. Во втором столбце могут быть только числа 7, 8, 9 в каком-то порядке (наибольшие числа и их сумма 24). Для третьего столбца остались только числа 2, 5, 6 в каком-то порядке. Рассмотрим первую строку. В первых двух клетках наибольшие числа 4 и 9. Тогда наименьшее число в третьей клетке – 6 (так как сумма 19). Это может быть лишь число 6.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Если найдены наборы во втором и третьем столбце – 3 балла. Если ещё есть ответ без дальнейшего обоснования – 4 балла. Полное решение – 7 баллов.

3. *Разрежьте фигуру на рисунке на три равные части (не обязательно по линиям сетки). Равными называются части, которые можно совместить, наложив друг на друга. При этом части можно поворачивать и переворачивать.*



Решение.



Критерии. Правильное разрезание – 7 баллов.

4. *На острове рыцарей и лжецов живут шесть жителей, которые разбились на пары. Каждого человека в каждой паре спросили, сколько лжецов в вашей паре. И все ответы оказались одинаковые. После этого всех их разбили на пары по-другому и задали тот же вопрос и получили ответы: 0, 0, 1, 1, 2, 2 в каком-то порядке. Сколько рыцарей и сколько лжецов могло быть на острове? Ответ надо обосновать.*

Ответ:.2 рыцаря и 4 лжеца или 4 рыцаря и 2 лжеца.

Решение. Так как в первом случае все ответы оказались одинаковыми, то в каждой паре были люди одинакового типа. Таким образом, рыцарей – 0, 2, 4 или 6. Если рыцарей 6, то во втором случае все ответы были бы 0. Если 0 рыцарей, то во втором случае не было бы ответа 2. Пример на 4 рыцаря: сначала пары РР, РР и ЛЛ – дают ответы 0, затем пары РЛ, РЛ (в каждой паре ответы 1, 2) и пара РР (ответы 0, 0). Пример на 2 рыцаря: сначала пары РР, ЛЛ и ЛЛ – дают ответы 0, затем пары РЛ, РЛ (в каждой паре ответы 1, 2) и пара ЛЛ (ответы 0, 0).

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Доказано, что не может быть нечётного числа рыцарей – 1 балл. Доказано, что не может быть 0 или 6 рыцарей – по 1 баллу, пример на 2 или 4 рыцаря – по 1 баллу. Баллы суммируются. Полное решение – 7 баллов.

5. *Тимофей раскрасил клетки таблицы 4 × 4 в три цвета так, что каждая клетка имеет общие стороны с клетками двух других цветов. Докажите, что клеток каждого цвета не меньше четырех.*

Решение. Рассмотрим 4 угловые клетки. Они окружены двумя клетками разного цвета. Итого в каждом углу клетки 3 цветов, причём для каждого угла они различные. Всего не менее 4 клеток каждого цвета.

Критерии. Идея рассмотреть угловую клетку – 1 балл. Не сказано, что для разных углов наборы клеток не пересекаются – минус 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

РЕШЕНИЯ
Личная олимпиада 7-8 классы

1. *На доске написаны два числа. Одно из них увеличили в 21 раз, а другое уменьшили на 2020, при этом сумма чисел не изменилась. Найдите хотя бы одну пару таких чисел.*

Ответ: (101; y), y – любое.

Решение. Обозначим искомые числа через x и y. Условие задачи равносильно равенству $21x + (y - 2020) = x + y$, отсюда $x = 101$. Таким образом, условию задачи удовлетворяет любая пара чисел вида (101; y), где y – произвольное число.

Критерии. Любая пара чисел, удовлетворяющая условию задачи, плюс проверка того, что она подходит – 7 баллов. Способы получения ответа предъявлять не обязательно. Без проверки – 6 баллов.

2. *Известно, что $a^2 + b^2 = 2{,}5ab$ и $a \neq b$. Вычислите значение выражения $\frac{a+b}{a-b}$.*

Ответ: ± 3.

Решение. Пусть $x = \frac{a+b}{a-b}$, тогда $x^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{4{,}5ab}{0{,}5ab} = 9$. Таким образом, $x^2 = 9$, и значит, $x = \pm 3$.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Потеря одного из ответов с учетом правильности рассуждения в целом – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

3. *Окружность катится снаружи по квадрату, длина стороны которого равна длине окружности. Сколько полных оборотов сделает эта окружность вокруг своего центра к моменту возвращения в исходное положение?*

Ответ: 5 оборотов.

Решение. Когда окружность прокатится по одной стороне квадрата, все её точки сделают один полный оборот вокруг центра окружности. При прохождении четырёх сторон получится 4 полных оборота. Кроме того, окружность сделает четверть оборота при вращении около каждой вершины квадрата. Всего получаем $4 + 4 \cdot 0{,}25 = 5$ оборотов.

Критерии. Рассуждения о том, что окружность за одну сторону делает один оборот, без дальнейшего продвижения – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

4. *Дано число 2020. Разрешается за один ход либо вычесть из числа сумму его цифр, либо переставить его цифры в любом порядке. Например, из числа 13 можно за один ход получить либо число 9, либо число 31. Какое наименьшее положительное число можно получить, действуя таким образом?*

Ответ: 9.

Решение. Только перестановками цифр наименьшее число из 2020 получить невозможно. Значит, на некотором шаге из имеющегося числа n придётся вычесть сумму его цифр $S(n)$. Полученное число $n - S(n)$ по признаку делимости будет делиться на 9; сумма цифр числа $n - S(n)$ будет тоже делиться на 9. Дальнейшие операции перестановки цифр и вычитания суммы цифр не меняют остатка от деления на 9. Поэтому все последующие числа – и наименьшее тоже – будут также делиться на 9. Значит, наименьшее число не меньше 9. Число 9 можно получить, например, так: 2020→2016→1026→1017→1008→999→972→279→261→126→117→108→99→81→18→9.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Утверждение, что придется использовать операцию вычитания своей суммы цифр без дальнейшего продвижения – 1 балл. Пример получения 9 – 3 балла. Доказано, что наименьшее число кратно 9, – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

5. *Восемь шахматистов играют турнир в один круг (каждый должен сыграть с каждым по одному разу). В какой-то момент главный судья заметил, что первый шахматист сыграл одну партию, второй – две, третий – три, ..., седьмой – семь. Какое наименьшее количество партий мог сыграть к этому времени восьмой шахматист?*

Ответ: 4 партии.

Решение. Так как нечётное количество партий сыграли 1-ый, 3-ий, 5-ый и 7-ой, то у 8-ого – чётное число партий (лемма о рукопожатиях). 0 партий он сыграть не может, так как 7-ой сыграл со всеми. Рассмотрим 6-ого игрока. Он не играл с 1-ым (с ним играл только 7-ой), значит, сыграл со всеми остальными, включая 8-го. Рассмотрим 5-ого игрока. Он не играл с 1-ым (с ним играл только 7-ой) и с 2-ым (с ним играли только 6-ой и 7-ой), значит, сыграл со всеми остальными, включая 8-го. Осталось добавить ещё одну игру 4-ому (у него уже 3 игры с 7-ым, 6-ым и 5-ым), и единственный, с кем он может сыграть – это 8-ой.

Критерии. Только правильный ответ – 1 балл. Доказано, что 8-ой сыграл нечётное число партий – 1 балл. Есть пример проведения игр с ответом 4, но не доказано, что это наименьшее количество – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.