Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2017-2018 год

5-6 класс

1. *Число 2018 зеркально отразили двумя способами (относительно линии В и линии А). Найдите разность двух чисел-отражений (от большего числа отнимается меньшее).*

<u>Ответ:</u> 3087.
<u>Решение.</u> Отраженные числа – 8105 и 5018. Их разность 3087.
<u>Критерии.</u> Только ответ – 1 балл. Если правильно найдено одно отраженное число – 3 балла. Ошибка в вычислении при правильно найденных отраженных числах – 5 баллов. Полное решение – 7 баллов.

2. *На одной улице стоят пять домов. В них живут 5, 15, 25, 35 и 45 человек соответственно. Известно, что для каждого из жителей есть не меньше двух других жителей, которые имеют такое же имя. Докажите, что какие-то два человека с одинаковыми именами живут в одном доме.*

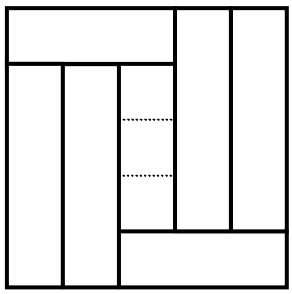
<u>Решение.</u> Допустим, что все жители одного дома имеют разные имена. Так как в одном из домов живут 45 человек, то и разных имён должно быть не меньше 45. Но тогда общее количество людей не меньше $45 \times 3 = 135$. С другой стороны, общее количество людей на этой улице $5 + 15 + 25 + 35 + 45 = 125$. Получаем противоречие.
<u>Критерии.</u> Полное решение – 7 баллов.

3. *Известно, что однозначное число А не делится ни на 2, ни на 3. Для некоторой цифры В число $\overline{AB}$ делится на 2, число $\overline{ABB}$ делится на 3, а число $\overline{ABBB}$ делится на 4. Найдите все возможные числа $\overline{AB}$.*

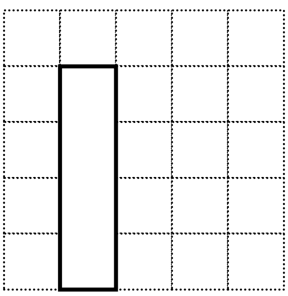
<u>Ответ:</u> 14, 58 и 74.
<u>Решение.</u> Цифра A может быть одной из трёх: 1; 5 или 7. Цифра B из признака делимости на 4 может быть только 0; 4 или 8, так как число BB должно делиться на 4. Из признака делимости на 3 должно делится на 3 число $A + B + B$. Условию удовлетворяют числа 144, 588 и 744, откуда получаем ответ.
<u>Критерии.</u> Только ответ из трёх верных чисел – 2 балла. Только два числа из трёх в ответе при отсутствии неправильных ответов – 1 балл. Только один из верных ответов или наличие неправильного ответа – 0 баллов. Вычисление только цифры А – 1 балл, только цифры В – 1 балл. Вычисление обеих цифр – 2 балла. Полное решение – 7 баллов.

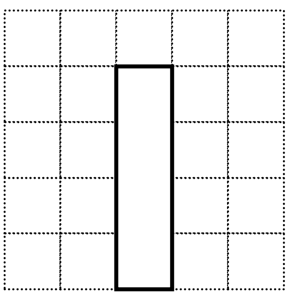
4. *Квадрат 5×5 разрезан на несколько прямоугольников 4×1 и 3×1. Сколько при этом может получиться прямоугольников каждого из размеров?*

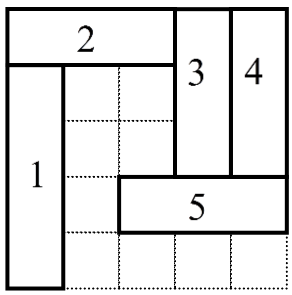
<u>Ответ:</u> 3 прямоугольника 3×1 и 4 прямоугольника 4×1.



<u>Решение.</u> Пусть было x прямоугольников 4×1 и y прямоугольников 4×1. Тогда можно составить уравнение для площади: $25 = 4x + 3y$. Число $25 – 3y$ должно делится на 4. Это условие выполняется при $y = 3$, тогда $x = 4$ и при $y = 7$, тогда $x = 1$.
Для первого случая есть возможное разрезание (см. рис.).
Допустим, что удалось разрезать так, что получился ровно один прямоугольник 4×1, тогда он может быть размещён только на краю большого квадрата. Иначе сбоку от него часть квадрата не разрежется на прямоугольники 3×1.







Если этот прямоугольник размещён на краю, то дальше начинаем выкладывать прямоугольники 3×1 единственным возможным способом, пока не придём к противоречию, доказывающему невозможность нужного разрезания.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Вычисленные 2 случая – 2 балла. Пример разрезания с ответом – 3 балла. Доказательство невозможности разрезания во втором случае – 3 балла. Полное решение – 7 баллов.

Личное первенство по математике «Математический фейерверк», 2017-2018 год

7-8 класс

1. *Зал кинотеатра вмещает 800 мест, которые поделены между тремя секторами – центральным и двумя одинаковыми – правым и левым. Все секторы вмещают по 8 рядов. В центральном секторе – по 28 мест в каждом ряду. В правом и левом секторах каждый следующий ряд вмещает на 2 места больше, чем предыдущий. По сколько мест в первых рядах правого и левого секторов?*

Ответ: 29.

Решение. В центральном секторе всего 28×8 = 224 места. Поэтому в двух других секторах – 576 мест, то есть в каждом по 288. Обозначим количество мест в первом ряду одного из боковых секторов через x. Тогда в следующих рядах соответственно $x + 2, \ldots, x + 14$ мест. Всего в секторе $x + (x + 2) + \ldots + (x + 14) = 8x + 56$ мест. Таким образом, $8x + 56 = 288$, откуда $x = 29$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

2. *Сумма трёх, не обязательно разных, простых чисел равна 23. Чему может равняться произведение этих чисел? Укажите все возможные ответы.*

Ответ: 76, 153, 273, 325, 385.

Решение. Пусть $23 = p + q + r$, где $p \le q \le r$. Проведём перебор по простому числу p. Очевидно, что $p \le 7 < \frac{23}{3}$.

Пусть $p = 2$. Тогда $q + r = 21$. Тогда одно из оставшихся простых – чётное, то есть $q = 2,\ r = 19$. Искомое произведение $D = 19 \cdot 2 \cdot 2 = 76$.

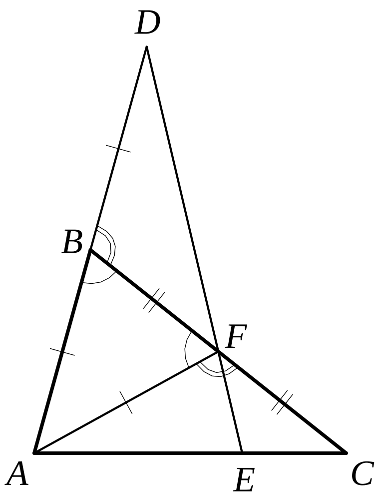
Пусть $p = 3$. Тогда $q + r = 20$. Тогда оба простых числа нечётны, рассмотрим возможные варианты: $q = 3,\ r = 17$ – подходит , $q = 5,\ r = 15$ – нет, $q = 7,\ r = 13$ – подходит, $q = 9$, $r = 11$ – нет. Для возможных вариантов получаем произведения: $D = 17 \cdot 3 \cdot 3 = 153$, $D = 13 \cdot 7 \cdot 3 = 273$.

Пусть $p = 5$. Тогда $q + r = 18$. Рассмотрим возможные варианты: $q = 5,\ r = 13$ – возможно, $q = 7,\ r = 11$ – возможно, $q = 9$, $r = 9$ – нет. Для возможных вариантов получаем произведения: $D = 13 \cdot 5 \cdot 5 = 325$, $D = 11 \cdot 7 \cdot 5 = 385$.

Пусть $p = 7$. Тогда $q + r = 16$. Единственный возможный вариант: $q = 7,\ r = 9$ – не подходит.

Критерии. Только ответ – 2 балла. 3 или 4 ответа из 5 – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

3. *В треугольнике ABC медиана AF равна стороне AB. На продолжении стороны AB за точку B отметили точку D такую, что AB = BD. Прямая DF пересекает сторону AC в точке E. Докажите, что EF = EC.*



Решение. Так как $BD = AF$ (по условию), $BF = FC$ (по определению медианы) и $\angle DBF = \angle AFC$ (как углы, дополняющие до развёрнутого равные углы $\angle ABF$ и AFB), то по двум сторонам и углу между ними $\Delta DBF = \Delta AFC$. Тогда $\angle ACF = \angle BFD = \angle EFC$ (как вертикальные). Таким образом ΔEFC равнобедренный, $EF = EC$.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

4. *Пусть задана операция $\langle x \rangle$, которая каждому числу x ставит в соответствие следующие значения: $\langle x \rangle = x$, если $x \ge \frac{1}{x}$ и $\langle x \rangle = \frac{1}{x}$, если $x < \frac{1}{x}$. Найдите все такие положительные x, которые удовлетворяют равенству: $\langle 2x \rangle = \langle 8x \rangle$.*

Ответ: $x = \frac{1}{4}$.

Решение. Условие $x \geq \frac{1}{x}$ равносильно условию $x \geq 1$, а условие $x < \frac{1}{x}$ – условию $x < 1$. Рассмотрим следующие случаи.

Если $0 < x < \frac{1}{8}$, то $8x < 1$ и $2x < 1$, поэтому $\langle 2x \rangle = \frac{1}{2x}$ и $\langle 8x \rangle = \frac{1}{8x}$. Тогда равенство принимает вид $\frac{1}{2x} = \frac{1}{8x}$, или $2x = 8x$, что невозможно при положительных x.

Если $\frac{1}{8} \leq x < \frac{1}{2}$, то $8x \geq 1$ и $2x < 1$, поэтому $\langle 2x \rangle = \frac{1}{2x}$ и $\langle 8x \rangle = 8x$. Тогда равенство принимает вид $\frac{1}{2x} = 8x$, или $16x^2 = 1$, откуда получаем ответ $x = \frac{1}{4}$.

Если $x \geq \frac{1}{2}$, то $8x > 1$ и $2x \geq 1$, поэтому $\langle 2x \rangle = 2x$ и $\langle 8x \rangle = 8x$. Тогда равенство принимает вид $2x = 8x$, что невозможно при положительных x.

Критерии. Ответ – 1 балл. Полное решение – 7 баллов.

Математический экспресс 2017-2018 г.

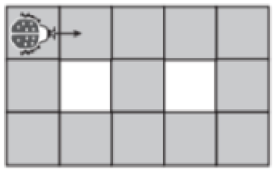
5-6 класс

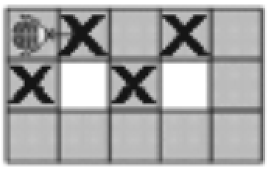
1 тур

Задача 1. Двузначное число назовем хорошим, если оно делится на сумму своих цифр и на каждую свою цифру по отдельности. Найдите все хорошие числа.

Ответ: **12, 24, 36, 48.**

Задача 2. Муха ходит по полю из 13 квадратиков, начиная с положения, указанного на картинке и в указанном направлении, каждую секунду перемещаясь в соседний квадратик. На развилке муха может пойти в любом направлении, но не может развернуться назад. Отметьте все клетки, в которых муха может оказаться через 11 секунд.



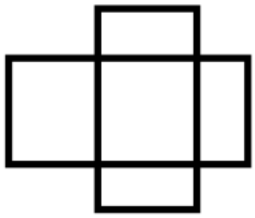
Ответ: 

2 тур

Задача 3. На карточках написали цифры от 1 до 7, каждую по одному разу и спрятали карточки в коробку. Сначала Катя достала из коробки три карточки наугад, затем Петя достал из коробки 2 карточки, не показывая их Кате. Катя сказала Пете: «Я знаю, что сумма чисел на твоих карточках четная». Определите какие карточки у Кати.

Ответ: **2, 4, 6.**

Задача 4. Ирина провела все диагонали во всех прямоугольниках на рисунке. Сколько диагоналей она провела? (Диагональ соединяет две противоположные вершины прямоугольника).



Ответ: **22 диагонали.**

3 тур

Задача 5. В ребусе МИГ + МИГ = ТИК одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными – разные. Найдите наибольшее значение числа ТИК.

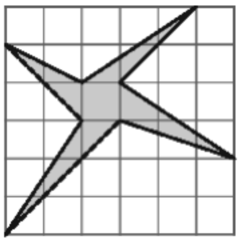
Ответ: **806.**

Задача 6. Маша старше своего братика на столько, сколько лет было ее братику два года назад. А тринадцать лет назад им с братиком вместе было столько лет, сколько сейчас ее братику одному. Сколько лет Маше?

Ответ: **26 лет.**

4 тур

Задача 7. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке, если площадь одного квадратика равна 1 см^2.



Ответ: **6.**

Задача 8. 80 белок собирали орехи. Каждая из них нашла хотя бы один орех, но ни одна не собрала более 7 орехов. При этом не более 6 орехов нашли 75 белок, не более 5 – 71 белка, не более 4 – 63 белки, не более 3 – 55 белок, не более 2 – 37 белок и не более одного – 22 белки. Сколько всего орехов собрали белки?

Ответ: **237 орехов.**

5 тур

Задача 9. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Известно, что его площадь численно равна его периметру. Найдите стороны прямоугольника. Укажите все варианты.

Ответ: **3×6, 4×4.**

Задача 10. Сколько существует трехзначных чисел, у которых и сумма, и произведение цифр четны?

Ответ: **450 чисел.**

6 тур

Задача 11. Егор купил несколько пирожков, заплатил за них 100 рублей, и получил сдачи столько рублей, сколько пирожков он купил. Сколько пирожков купил Егор, если известно, что один пирожок стоит четное число рублей? Укажите все варианты.

Ответ: **4 и 20.**

Задача 12. Найдите площадь квадрата со знаком «?», если площадь левого нижнего квадрата равна 2018 см^2.

Ответ: **1009 см^2.**

Математический экспресс 2017-2018 г.

7-8 класс

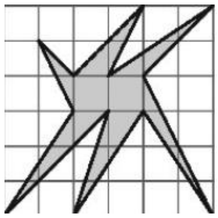
1 тур

Задача 1. Алена вошла в большой зал, где вокруг круглого стола стояло 2018 стульев и на некоторых из них уже сидели люди. Оказалось, что она не может сесть так, чтобы рядом с ней никто не сидел. Какое наименьшее число людей могло в этот момент сидеть за столом?

Ответ: **673 человека.**

Задача 2. Пятачок шел в гости к Винни-Пуху и на половине пути увидел, что, кажется, собирается дождь. Тогда он увеличил свою скорость на 25% и пришел к Винни на 10 минут раньше, чем планировал. Сколько времени заняла дорога Пятачка?

Ответ: **1 час 30 минут.**



2 тур

Задача 3. Найдите площадь фигуры, изображенной на рисунке, если площадь одного квадратика равна 1.

Ответ: **8,5.**

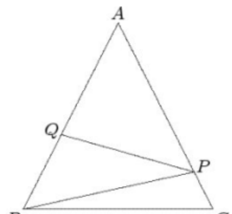
Задача 4. Алина умножила 40% от числа 2 на 60% от числа 3. Сколько процентов от числа 4 у нее получилось в результате?

Ответ: **36%**

3 тур

Задача 5. Известно, что b – среднее арифметическое чисел a и c, причем $a - c = 10$. Чему может быть равно выражение $ab + bc - ac - b^2$?

Ответ: **25.**



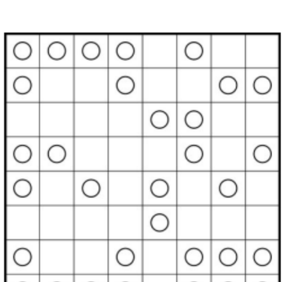
Задача 6. В треугольнике ABC известно, что $AB = AC$, и что PQ перпендикулярно AB. Кроме того, $\angle BPC = 120°$, $\angle ABP = 50°$. Чему равен $\angle PBC$?

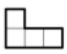
Ответ: **5°.**

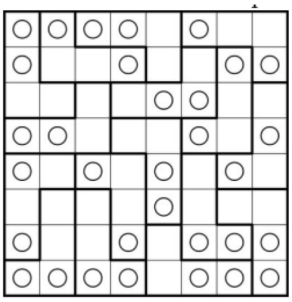
4 тур

Задача 7. Найдите все решения ребуса: КЛОП+КЛОП+КЛОП+КЛОП = ПОЛК. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным буквам разные цифры).

Ответ: **2178×4=8712.**



Задача 8. Разрежьте квадрат на 16 фигурок вида . В каждой фигурке должно находиться ровно два кружка. Фигурки могут располагаться произвольно.

Ответ:  .

5 тур

Задача 9. Электронные часы показывают время в 24-х часовом формате (ЧЧ:ММ, от 00:00 до 23:59). Сколько минут в сутки часы будут показывать время так, что каждая следующая цифра на часах будет больше предыдущей?
Ответ: **87 минут.**

Задача 10. Известно, что числа x, y, z удовлетворяют равенствам $x^2yz^3 = 7^3$, $xy^2 = 7^9$. Чему может быть равно число xyz?
Ответ: $\mathbf{7^4 = 2401}$**.**

6 тур

Задача 11. Блоха прыгает по координатной плоскости по узлам сетки. За один ход она может прыгнуть в соседний узел (по вертикали или по горизонтали в любую сторону). Узлы A и B лежат на одной горизонтальной прямой, и расстояние между ними равно 6. Рассмотрим все пути блохи из A в B, содержащие не больше 20 прыжков. Сколько узлов попадает хотя бы на один из таких путей?
Ответ: **203 узла.**

Задача 12. Сколько существует восьмизначных чисел, в записи которых цифры идут в порядке убывания?
Ответ: **45 чисел.**