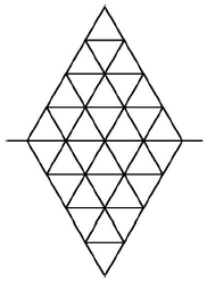
Турнир математических боёв № 1 A

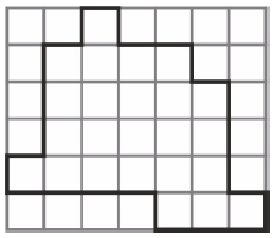
1. Две трети людей в комнате сидят на трех четвертях стульев. Остальные люди стоят. При этом остается 6 свободных стульев. Сколько всего людей в комнате?
2. Закрасьте наименьшее количество клеток таблицы 4 × 4 (см. рисунок) так, чтобы оставшаяся фигура удовлетворяла следующим условиям: в каждой строчке и в каждом столбце все цифры различны.

2	4	1	3
3	3	4	4
3	2	3	4
4	3	2	4

3. Каждая половина (верхняя и нижняя) фигуры на рисунке состоит из 3 красных треугольников, 5 синих треугольников и 8 белых треугольников. Паша перегнул фигуру посередине, и наложил половины друг на друга. Он обнаружил, что совпали 2 пары красных треугольников и 3 пары синих. Еще два раза образовались красно-белые пары. Сколько пар белых треугольников совпали?



4. Какое минимальное количество лет надо взять, чтобы количество месяцев, содержащихся в них, записывалось только нулями и единицами?
5. Разрежьте фигуру на картинке на 4 равные части по линиям клеточек. Части считаются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.



6. Царевна-лягушка прыгает по пенькам, на каждом из которых написано одно натуральное число от 2 до 20. Каждое число встречается по одному разу. Она может перепрыгнуть с пенька на пенёк, если числа на них не взаимнопростые (НОД не равен 1). Она не может вернуться на пенёк, на котором уже побывала. Какое наибольшее число пеньков она может посетить?

Турнир математических боёв № 1 B

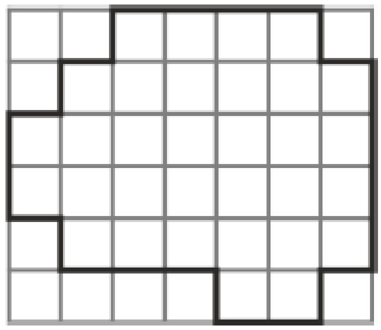
1. Бабушка испекла своей внучке торт на день рождения, который весит целое число граммов. Перед тем, как украсить его, она взвесила торт на цифровых весах, которые округляют вес до десятков граммов в ближайшую сторону (если вес оканчивается на 5, то весы округляют его в меньшую сторону). Результат оказался равным 1440 г. Когда бабушка украсила торт одинаковыми свечками, количество которых было равно возрасту внучки, весы показали 1610 г. Известно, что вес каждой свечки составляет целое число граммов, но вес каждой свечи по отдельности на весах показывается равным 40 г. Сколько лет может быть внучке?
2. Вне квадрата $ABCD$ взяли такую точку P, что $AP = AB$ и $\angle ADP = 15°$. Какие возможные значения может иметь величина угла APB?
3. Известно, что $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + a$. Какие значения может принимать выражение $a(a^2 - b^2) + b(b^2 - c^2) + c(c^2 - a^2)$?
4. Найдите значение выражения $\dfrac{(8!+7!)(7!+6!)(6!+5!)(5!+4!)(4!+3!)(3!+2!)(2!+1!)}{(8!-7!)(7!-6!)(6!-5!)(5!-4!)(4!-3!)(3!-2!)(2!-1!)}$, где для натурального числа n через $n!$ обозначено произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n (т.е. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3$, ...).
5. На некоторых клетках доски 10 × 10 стоят шашки. Клетка называется «*красивой*», если на горизонтали, проходящей через эту клетку, стоит нечетное число шашек, и на вертикали, проходящей через ту же клетку, тоже стоит нечетное число шашек. Может ли на доске оказаться ровно 42 *красивые* клетки?
6. На плоскости отмечены несколько точек, причем никакие четыре из них не лежат на одной прямой. Назовем отрезок, соединяющий две отмеченные точки, «*плохим*», если внутри него есть третья отмеченная точка. Известно, что каждую из отмеченных точек можно соединить «*плохим*» отрезком с какой-нибудь другой отмеченной точкой. Какое наименьшее количество точек может быть отмечено?

Турнир математических боёв № 2 A

1. Паша расставил на шахматной доске 10 ладей. После этого Лера начинает ставить дополнительные ладьи на пустые клетки. Лера может поставить очередную ладью, если она

угрожает не менее чем трём уже имеющимся на доске ладьям. Мог ли Паша расставить ладьи изначально так, чтобы Лера могла заполнить ладьями всю доску?

2. Разрежьте фигуру на картинке на 4 равные части по линиям сетки. Части считаются равными, если их можно наложить друг на друга так, чтобы они полностью совпали.



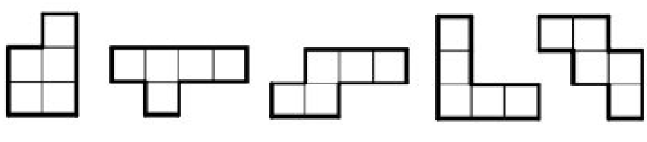
3. Руслан написал двузначное число N, посчитал сумму его цифр и произведение его цифр. Далее он сложил эти два результата и, к своему удивлению, получил исходное двузначное число N. Чему может равняться последняя цифра числа N? Укажите все варианты.
4. Сколько всего существует таких чисел N, что если разделить N на 3, получится целое трехзначное число, и если умножить N на 3, получится целое трехзначное число?
5. Существует ли клетчатая фигурка, из любого количества которых можно сложить шестиугольник (без пропусков и наложений)?
6. Ульянка в 27 лет имела трех сыновей различных возрастов, возраст каждого ребенка – натуральное число. Прошло 10 лет, и ее возраст стал равен суммарному возрасту всех трех ее сыновей. Сколько лет сейчас сыновьям Ульянки?

Турнир математических боёв № 2 В

1. ABC – равносторонний треугольник, BCE – равнобедренный прямоугольный треугольник, построенный во внешнюю сторону треугольника ABC. Найдите угол BAE.
2. В лагерь приехали больше одного мальчика и больше одной девочки. Каждому мальчику дали по a яблок, а каждой девочке – по b груш. Если один мальчик раздаст всем девочкам по яблоку, то у него ничего не останется. А если девочка раздаст всем мальчикам по две груши, то у неё тоже ничего не останется. Всего фруктов 99. Сколько детей?
3. Дед Мороз пришёл к Саше, и Саша предложил ему игру: Саша выбирает натуральное число n, а Дед Мороз делит множество всех целых чисел от 1 до n на два набора. После этого считается сумма чисел в каждом наборе, и вычисляется модуль разности этих сумм. Саша хочет, чтобы полученное число было как можно больше, ведь именно столько подарков даст ему Дед Мороз. Какое максимальное количество подарков Саша может обеспечить?
4. Из прямоугольника на клетчатой бумаге можно вырезать (по клеточкам) 360 квадратов 2×2. Докажите, что из него можно вырезать 200 прямоугольников 1×7.
5. На бумажную ленту выписали подряд без пропусков все числа от 1 до 33 (так, что получилось одно длинное многозначное число), после чего ленту разрезали на кусочки так, что на каждом кусочке осталось число, меньшее 1000. Докажите, что произведение чисел на всех карточках делится на 32.
6. Найдите все натуральные решения уравнения $xy + x + y = 2018$.

Турнир математических боёв № 3 А

1. Михаил закрасил некоторые клетки квадрата 6×6. Оказалось, что никакие две из закрашенных клеток не имеют ни общей стороны, ни общей вершины. Какое наибольшее количество клеток мог закрасить Михаил?
2. На доске написано натуральное число. Его можно умножать на 2 и можно отбрасывать его последнюю цифру. Докажите, что какое бы число ни было изначально написано на доске, из него за несколько таких операций можно получить число 100.
3. Разрежьте квадрат 5×5 клеток на пять фигурок, приведенных на картинке. Фигурки можно поворачивать и переворачивать.



4. Расставьте цифры 1, 2, 3 и 4, каждую по одному разу в клеточки, чтобы получить наименьший возможный результат.

$$(\square\square - \square) \times \square$$

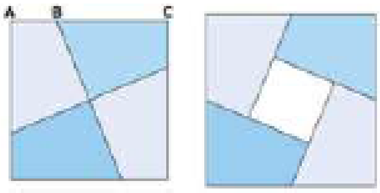
5. Саша хочет написать на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6 (каждое – по одному разу) так, чтобы число на каждой грани оказалось делителем суммы чисел на четырех соседних с ней гранях. Сможет ли он это сделать?

2	3	4	3
3	4	3	2
4	3	2	1

6. У Димы есть таблица 4×4, заполненная числами (см. рисунок справа). Он может за ход взять любой столбец и увеличить на 1 любые числа (не обязательно все) в этом столбце. Такую же операцию он может проводить с любой строкой. Какое наименьшее число ходов ему потребуется, чтобы сделать все числа равными?

Турнир математических боёв № 3 В

1. Аня взяла квадрат со стороной 24 см, разрезала на 4 одинаковые части и переложила их так, что получился квадрат со стороной 26 см, а внутри образовалась квадратная дырка (см. рисунок). Найдите длины *AB* и *BC*.



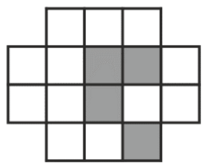
2. В ячейки таблицы 3×3 вписаны цифры от 1 до 9 – каждое по одному разу. Цифра 4 уже вписана. Могло ли оказаться так, что трехзначное число во второй строке в два раза больше, чем число в первой строке, а число в третьей строке – в три раза больше, чем число в первой строке?

		4

3. Докажите, что для всех положительных x и y выполняется неравенство $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\geq\frac{4}{x+y}$.
4. На плоскости отмечено несколько точек. Рассматриваются всевозможные отрезки с концами в этих точках. Назовем отрезок четным, если на нем лежит четное число отмеченных точек, и нечетным, если на нем лежит нечетное число отмеченных точек. Каких отрезков больше: четных или нечетных?
5. Палиндромом называется натуральное число, которое читается одинаково слева направо и справа налево. Докажите, что для любой натуральной степени двойки найдётся палиндром, который на неё делится.
6. Через вершины *A* и *C* треугольника *ABC* проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла *ABC*, пересекающие прямые *CB* и *BA* в точках *K* и *M* соответственно. Найдите *AB*, если *BM* = 8, *KC* = 1.

Личная олимпиада 5 класс

1. Представьте число 2018 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы все цифры в записи этих слагаемых были различны.
2. Разрежьте фигуру на 4 равные части так, чтобы в каждой было по одной закрашенной клетке.



3. У двух малышей есть по одинаковому набору кубиков, в каждом – 36 кубиков. Вася разложил их на 7 кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.
4. Дата 3 января 2018 года записывается как 03012018 (без точек внутри). На бумажную ленту Аня и Маня выписали подряд без пропусков все даты января 2018 года (в том же виде, как показано выше) так, что получилось одно длинное многозначное число. Сколько раз на этой бумажной ленте встретится фрагмент 201?
5. В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришли ровно 100 первоклассников, но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им идти. Ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.

Личная олимпиада 6 класс

1. В строку выписаны пять последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого – 20?

2. У Миши есть прямоугольник 4×100 клеток. Даша закрашивает в нем клетки в каком-то порядке. Но Миша запретил ей закрашивать клетку, двумя или более сторонами примыкающую к уже закрашенным клеткам. Какое наибольшее количество клеток Даша сможет закрасить?
3. Стёпа выписал все трехзначные числа, произведение цифр которых равно 24. Сколько чисел выписал Стёпа?
4. Может ли Петя вырезать три треугольника и расположить их так, что пересечение красного и зеленого треугольников будет иметь форму треугольника, пересечение красного и синего – четырехугольника, зеленого и синего – пятиугольника и при этом пересечение всех трех треугольников будет шестиугольником?
5. На острове жило 2017 аборигенов, каждый из которых был либо рыцарем, всегда говорящим только правду, либо лжецом. Один из аборигенов сказал: «Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов». После чего эмигрировал с острова, и их осталось 2016. Еще один из аборигенов сказал ту же самую фразу: «Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов», после чего также эмигрировал с острова, и их осталось 2015. И так далее, они говорили по одному эту фразу и исчезали. Сейчас на острове 10 жителей. Сколько лжецов могло быть среди аборигенов изначально?

Личная олимпиада 7-8 класс

1. Путь из города Новостройска в деревню Глухоманьку проходит первые 80 км по шоссе, а оставшиеся 120 км по грунтовой дороге. Первую (шоссейную) часть автобус проезжает на 2 часа быстрее, чем вторую (грунтовую). Шофер и все жители Глухоманьки ждут, не дождутся, когда всю дорогу заасфальтируют, потому что тогда автобус будет проходить весь маршрут на час быстрее. Найдите скорости движения автобуса по шоссе и по грунтовой дороге.
2. Дата 3 января 2018 года записывается как 03012018 (без точек внутри). На бумажную ленту Аня и Маня выписали подряд без пропусков все даты января 2018 года (в том же виде, как показано выше) так, что получилось одно длинное многозначное число. После чего ленту разрезали на три кусочка, Аня взяла себе средний, а Маня – два остальных. Может ли так случиться, что Маня сложит два своих кусочка (в каком-то порядке), и её число совпадет с Аниным?
3. В таверне «Подзорная труба» сидят несколько пиратов. Некоторые из них пьют грог, а остальные – ром. Средний возраст пиратов, пьющих грог, равен 22 годам, а пьющих ром – 45 годам. В один прекрасный момент Джон Сильвер поменял свой напиток. В результате оба средних возраста – и пьющих грог, и пьющих ром – увеличился ровно на 1 год. Сколько пиратов сидит в таверне?
4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнены соотношения: $\angle DAB = \angle ABC = 60°$ и $\angle CAB = \angle CBD$. Докажите, что $AD + BC = AB$.
5. Петя хочет раскрасить все точки плоскости в несколько цветов так, чтобы на каждой прямой отсутствовали точки хотя бы одного из использованных им цветов. Какое наименьшее число цветов потребуется для такой раскраски?

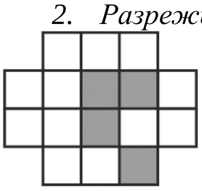
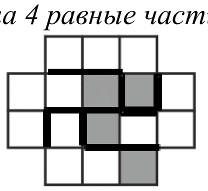
РЕШЕНИЯ

Личная олимпиада 5 класс

1. *Представьте число 2018 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы все цифры в записи этих слагаемых были различны.*

Ответ: 2018 = 1976 + 42. Возможны другие решения.
Критерии. Любой верный пример – 7 баллов.

2. *Разрежьте фигуру на 4 равные части так, чтобы в каждой было по одной закрашенной клетке.*

Решение.
Критерии. Правильное разрезание – 7 баллов.

3. *У двух малышей есть по одинаковому набору кубиков, в каждом – 36 кубиков. Вася разложил их на 7 кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики одинаковые. Гена разложил свои кубики на пять кучек и утверждает, что в каждой кучке все кубики разные. Докажите, что кто-то из них ошибается.*

Решение. То, что сказал Вася, означает, что всего имеется не более семи различных типов кубиков, так как в каждой куче не более одного типа. То, что сказал Гена, означает, что кубиков каждого типа не больше пяти (потому что в каждой кучке у Гены не более одного кубика каждого из типов, а кучек всего пять). Получается, что если оба мальчика правы, то общее число кубиков не может превосходить $7 \cdot 5 = 35$, а всего по условию в наборе 36 кубиков, поэтому кто-то неправ.

Критерии. Полное решение – 7 баллов.

4. *Дата 3 января 2018 года записывается как 03012018 (без точек внутри). На бумажную ленту Аня и Маня выписали подряд без пропусков все даты января 2018 года (в том же виде, как показано выше) так, что получилось одно длинное многозначное число. Сколько раз на этой бумажной ленте встретится фрагмент 201?*

Ответ: 34.

Решение. Посмотрим, откуда может взяться первая двойка в 201. Если это первая цифра года, то она встречается в каждой дате, итого 31. Месяцу эта двойка принадлежать не может. Если же эта двойка принадлежит номеру дня, то она обязательно стоит второй, так как если она стоит первой, то это 20 число, и месяц обязан начать-ся с 1. Значит, это вторая цифра номера дня, тогда 01 – это месяц январь. Таких дат три – 02, 12 и 22. Отсюда ответ.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, если найден только вариант с первой цифрой в номере года – 2 балла, только ответ – 1 балл.

5. *В каждую из трех школ микрорайона записалось по 100 первоклассников. 1 сентября в каждую школу пришли ровно 100 первоклассников, но при этом некоторые дети перепутали, в какую школу им идти. Ровно 40 детей пришли не в свою школу. Докажите, что можно выбрать двух заблудившихся первоклассников и поменять их местами так, что в результате каждый из них окажется в своей школе.*

Ответ: нет.

Решение. Пусть первоклассник А должен был идти в школу 1, но пришел в школу 2. Тогда его место в первой школе кто-то занял, пусть это Б. Если по записи Б должен был идти в школу 2, просто меняем А и Б местами. Если же по записи Б должен был идти в школу 3, то его место там тоже кто-то занял, пусть это В. Если В должен был идти в школу 1, то можно поменять местами Б и В. Остался случай, когда В должен идти во 2 школу (получился цикл из А, Б и В). Если их поменять по циклу, все было бы по закону, но этого делать нельзя, оставим их на время в покое. Получается, что все дети разобьются на циклы из трех школьников, но 40 на 3 не делится, поэтому кроме циклов из 3 человек будут и циклы из двух, что нам и надо.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Идея цикла из трех школьников – 2 балла.

РЕШЕНИЯ
Личная олимпиада 6 класс

1. *В строку выписаны пять последовательных натуральных чисел. Возможно ли, что сумма цифр первого числа равна 52, а пятого – 20?*

Ответ: Да.

Решение. Например, 8839996, 8839997, 8839998, 8839999, 8840000. Так как сумма цифр снизилась, то произошёл переход через десяток, сотню, тысячу или проч. Так как чисел пять, то был ровно один переход. При переходе через разряд уходит несколько 9 (пусть уходит n девяток), зато прибавляется единица к следующему разряду, то есть сумма цифр уменьшается на $9n - 1$. Получаем, что $52 + 3 - 9n + 1 = 56 - 9n = 20$, $9n = 36$, $n = 4$, далее подбираем пример. В любом примере обязательно будет переход через число, кратное 10 000.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Только ответ – 0 баллов.

2. *У Миши есть прямоугольник 4×100 клеток. Даша закрашивает в нем клетки в каком-то порядке. Но Миша запретил ей закрашивать клетку, двумя или более сторонами*

примыкающую к уже закрашенным клеткам. Какое наибольшее количество клеток Даша сможет закрасить?

Ответ: 300.

Решение. Сначала покажем, как Даше закрасить 300 клеток. Для этого она сначала красит верхний ряд слева направо (это 100 клеток), потом нижний ряд тоже слева направо (это еще 100 клеток), а затем она красит две средние строчки в шахматном порядке (это еще 100 клеток). При этом каждая новая закрашенная клетка прилегает к уже закрашенным не более чем одной стороной. Докажем, почему Даша не может закрасить больше. Разобьем весь прямоугольник на квадраты 2×2. Всего их будет 100 штук. В каждом квадрате Даша не может закрасить больше трех клеток, всего не более 300 клеток.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, только пример – 3 балла, только оценка – 3 балла, только ответ – 1 балл.

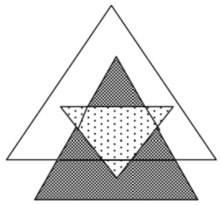
3. *Стёпа выписал все трехзначные числа, произведение цифр которых равно 24. Сколько чисел выписал Стёпа?*

Ответ: 21 число.

Решение. Если наименьшая цифра числа 1, то возможны наборы 1, 3, 8 или 1, 4, 6. Если наименьшая цифра числа 2, то возможны наборы 2, 3, 4 или 2, 2, 6. Других наборов нет. В первых трёх случаях перестановками получаем по 6 чисел, в последнем случае – 3 числа. Всего 21 число.

Критерии. Полное решение – 7 баллов, найденные наборы чисел – 2 балла, потеря одного варианта – 4 балла, только ответ – 1 балл.

4. *Может ли Петя вырезать три треугольника и расположить их так, что пересечение красного и зеленого треугольников будет иметь форму треугольника, пересечение красного и синего – четырехугольника, зеленого и синего – пятиугольника и при этом пересечение всех трех треугольников будет шестиугольником?*



Ответ: Да.

Решение. Пример на рисунке. Могут быть и другие примеры.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов, только ответ – 0 баллов.

5. *На острове жило 2017 аборигенов, каждый из которых был либо рыцарем, всегда говорящим только правду, либо лжецом. Один из аборигенов сказал: «Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов». После чего эмигрировал с острова, и их осталось 2016. Еще один из аборигенов сказал ту же самую фразу: «Среди жителей острова, отличных от меня, нечетное число лжецов», после чего также эмигрировал с острова, и их осталось 2015. И так далее, они говорили по одному эту фразу и исчезали. Сейчас на острове 10 жителей. Сколько лжецов могло быть среди аборигенов изначально?*

Ответ: 1, 3, 5, 7, 9 или 11 лжецов.

Решение. Допустим, что до какого-то момента уезжали только рыцари. Тогда все время оставалось нечетное число лжецов. Пусть в какой-то момент исчез лжец. Тогда он, сказав про нечетное число, солгал, то есть без него – четное число, а с ним – нечетное. После его исчезновения останется четное число лжецов, поэтому если кто-то из них исчезнет, перед исчезновением он должен сказать правду, чего быть не может. Значит, исчезнуть мог только один лжец (или ни одного). Если ни одного, то на острове осталось 1, 3, 5, 7 или 9 лжецов (и столько же было первоначально), если исчез один, то осталось 0, 2, 4, 6, 8 или 10 (первоначально было 1, 3, 5, 7, 9 или 11 лжецов).

Критерии. Полное решение – 7 баллов, только ответ – 1 балл.