

**Методическая разработка «Применение геометрии
в алгебраических задачах»**

Аннотация. Данная методическая разработка представляет собой сборник задач школьной алгебры, при решении которых можно применять геометрию. Элементы геометрической алгебры можно осваивать уже в рамках наглядной геометрии 5 класса, и далее развивать это направление в процессе обучения на уроках и элективных курсах. Применение геометрии в алгебраических задачах имеет богатую историю и являет единство математики как науки и как школьного предмета. Развитие аналитических и геометрических навыков, формирование геометрической культуры – эти компоненты в методологической взаимосвязи отвечают целям математического образования.

Задачи.

1. При каком значении параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 1$. Это уравнение в системе координат $XOА$ задает окружность с центром $(3; 2)$ и радиусом 1 (рис. 1). Наибольшее расстояние между точками окружности, лежащими на одной прямой, параллельной оси абсцисс, равно 2 и достигается при $a = 2$.

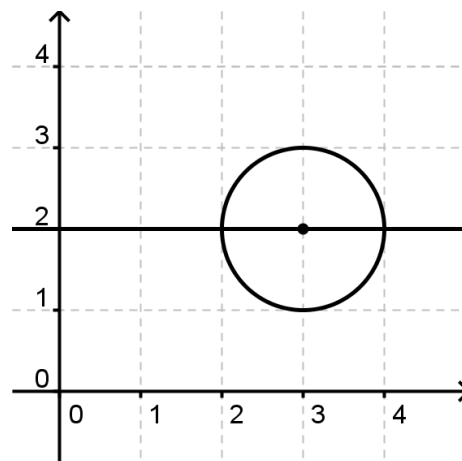


Рис. 1

Ответ: $a = 2$.

2. Решите уравнение $\sqrt{13 - 12\cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x} = 2\sqrt{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Решение. Рассмотрим треугольники ACD и BCD с общей стороной $CD = 2$ (рис. 2). $\angle ACD = x$, $AC = 3$, по теореме косинусов $AD = \sqrt{13 - 12\cos x}$. Угол BCD равен $\frac{\pi}{2} - x$, $BC = \sqrt{3}$, $BD = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}\sin x}$. В треугольнике ABC гипотенуза

AB равна $2\sqrt{3}$, значит, равна сумме данных корней. Следовательно, точка D принадлежит гипотенузе AB . Применяя метод площадей для треугольников ACD , BCD и ABC получаем $3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, откуда $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ и $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $x = \arcsin\frac{3}{4} - \frac{\pi}{6}$.

3. Найдите значение x , при котором сумма $\sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ минимальна.

Решение. $\sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}} =$
 $= \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} + \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = AC + CB$

(рис. 3), где $A\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $C(x; 0)$. Сумма $AC + CB$ будет минимальной, если равны острые углы, которые составляют прямые AC и CB с осью OX (задача Герона). Искомое значение x_0 найдем из следующей пропорции:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{BN}{CN}, AP = \frac{\sqrt{3}}{2}, BN = \frac{1}{2}, PC = x_0 - \frac{1}{2},$$

$$CN = \frac{\sqrt{3}}{2} - x_0. \text{ Тогда } x_0 = \sqrt{3} - 1.$$

Ответ: $x_0 = \sqrt{3} - 1$.

Если поставлена задача найти только наименьшее значение выражения $\sqrt{1+x^2-x} + \sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$, то для решения рассмотрим треугольники ACD и BCD с общей стороной $CD = x$ (рис. 4). Угол ACD равен 60° , $AC = 1$, $AD = \sqrt{1+x^2-x}$ (теорема косинусов). Угол BCD равен 30° , $BC = 1$, $BD =$

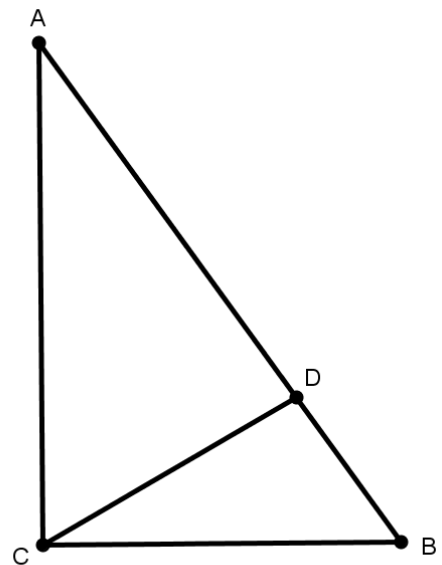


Рис. 2

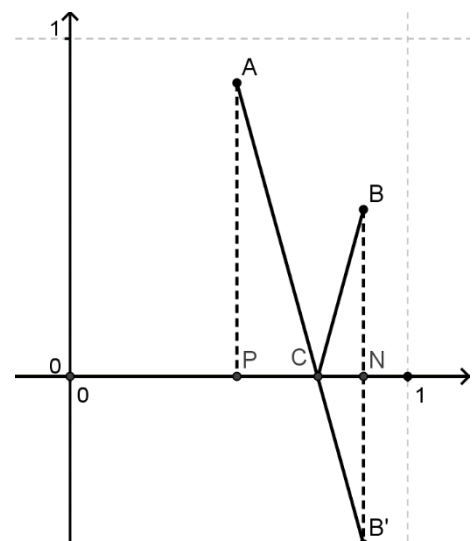


Рис. 3

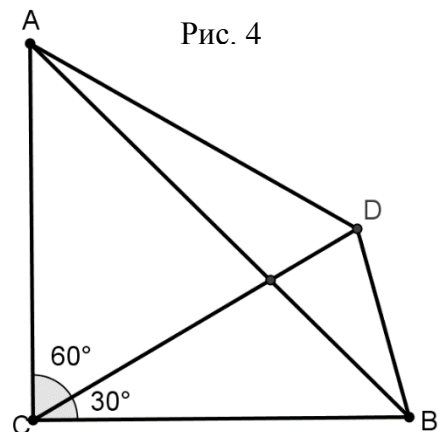


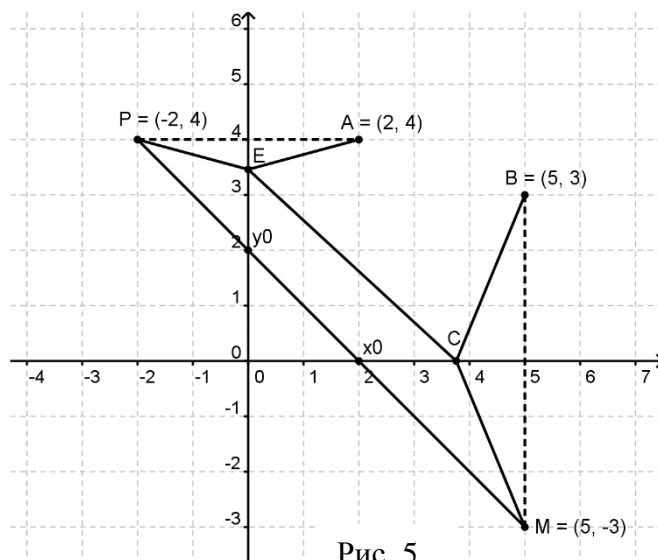
Рис. 4

$\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$. Ломаная ADB имеет наименьшую длину, если вершина D принадлежит гипотенузе AB равнобедренного треугольника ACB . Искомое значение равно $\sqrt{2}$.

4. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-5)^2+9} + \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{4+(y-4)^2}.$$

Решение. На плоскости XOY (рис. 5) зададим следующие точки: $A(2; 4)$, $B(5; 3)$, $C(x, 0)$, $E(0, y)$. Тогда первый корень – это длина отрезка BC , второй корень – длина CE и третий корень – длина AE . Точка $P(-2; 4)$ симметрична A относительно оси OY , точка $M(5; -3)$ симметрична B относительно OX . Длина ломаной $AECB$



равна длине ломаной $PESM$, так как $EA = EP$ и $CB = CM$. Ломаная $PESM$ имеет наименьшую длину, если точки E и C расположены на отрезке PM , равном $7\sqrt{2}$.

Ответ: $7\sqrt{2}$.

Заметим, что составив уравнение прямой PM , мы можем найти значения x_0 и y_0 , при которых данная сумма корней будет наименьшей.

5. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}, \text{ если } x-y-3=0.$$

Решение. Данную сумму можно интерпретировать, как сумму расстояний от точки $C(x, y)$ прямой a , заданной уравнением $x-y-3=0$, до точек $O(0; 0)$ и $A(4; 3)$ на плоскости XOY (рис. 6). Точка $C(x_0, y_0)$, отвечающая усло-

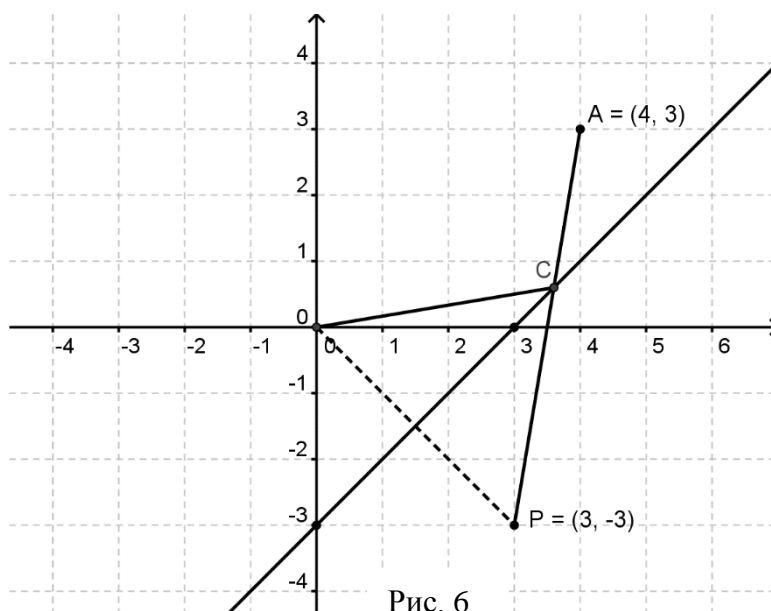


Рис. 6

вию задачи, расположена на отрезке AP , где точка $P(3; -3)$ симметрична O относительно прямой a (задача Герона). Длина отрезка AP , равная $\sqrt{7}$, есть искомое значение.

Ответ: $\sqrt{7}$.

6. Определите все значения, которые может принимать выражение $3x - 2y$, если $x^2 + y^2 = 13$.

Решение. Пусть $3x - 2y = a$. Искомые значения a можно найти, исследуя взаимное расположение окружности с радиусом $\sqrt{13}$ (рис. 7) и прямых вида $y = \frac{3}{2}x - \frac{a}{2}$. Рассмотрим треугольник AOB (рис. 8). Прямая AB – касательная к окружности. Пусть $\angle BAO = \alpha$, тогда $\angle BOK = \alpha$. Зная, что $\operatorname{tg} \alpha = 1,5$ и $OK = \sqrt{13}$, найдем $OB = 6,5$. $|a| = 2OB$, следовательно, $-13 \leq a \leq 13$.

Можно найти a , применив формулу расстояния от точки O до прямой $3x - 2y - a = 0$.

$$\sqrt{13} = \frac{|a|}{\sqrt{13}}, |a| = 13.$$

Ответ: $[-13; 13]$.

7. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 4y = 26, \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5} + \sqrt{x^2 + y^2 - 20x - 10y + 125} = 10. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение запишем в виде $\sqrt{(x - 2)^2 + (y + 1)^2} + \sqrt{(x - 10)^2 + (y - 5)^2} = 10$. Первый корень – расстояние (рис. 9) между точками $C(x, y)$ и $A(2; -1)$. Второй корень – расстояние между точками $C(x, y)$ и

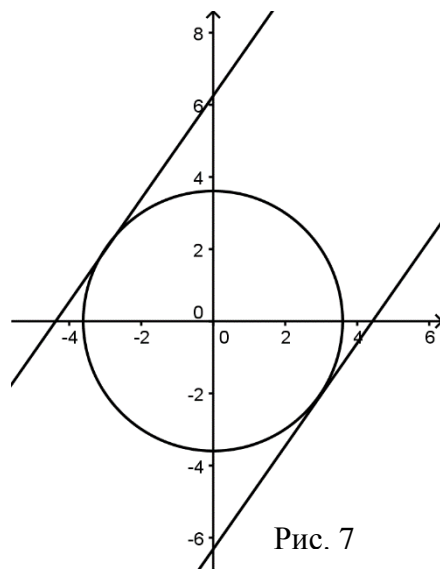


Рис. 7

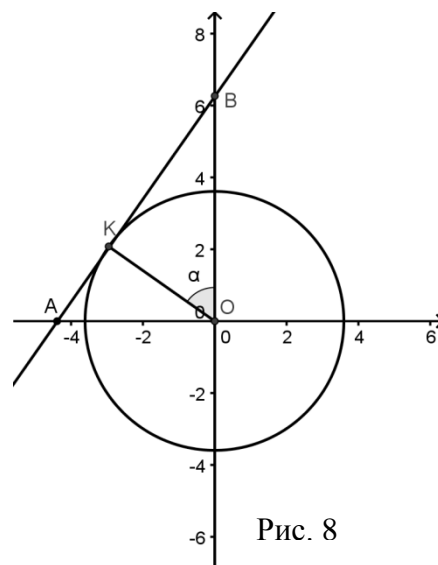


Рис. 8

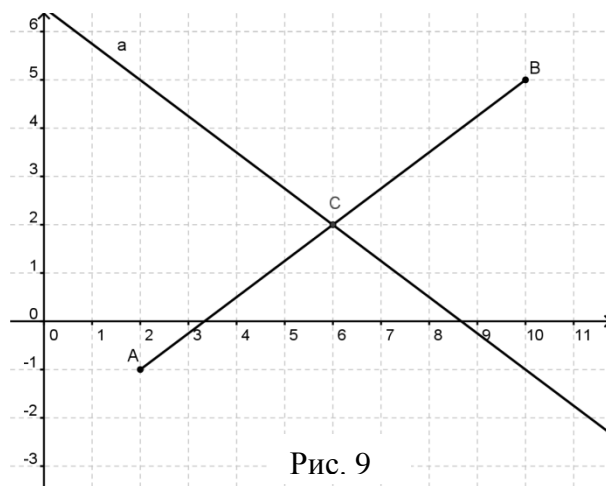


Рис. 9

пендикулярна a (следует из подобия прямоугольных треугольников, или проверяется теоремой Пифагора). Пусть точка N – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую a . Тогда равенство $BC + CN = AB$ выполняется при условии принадлежности точки C отрезку AB , на котором расположены следующие целочисленные точки: $(0; 4)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$.

Ответ: $(0; 4)$, $(1; 2)$, $(2; 0)$.

10. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{(x - a)^2 + (y - a^2)^2} = |a|\sqrt{1 + a^2}, \\ (x - 4)^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение. Точка $C(x, y)$ на координатной плоскости принадлежит окружности ω с центром в точке $E(4; 0)$ и радиусом 1 (рис. 12).

$OC = \sqrt{x^2 + y^2}$. Точка $A(a, a^2)$ удалена от начала координат на расстояние, равное $|a|\sqrt{1 + a^2}$. Первое уравнение запишем в виде суммы

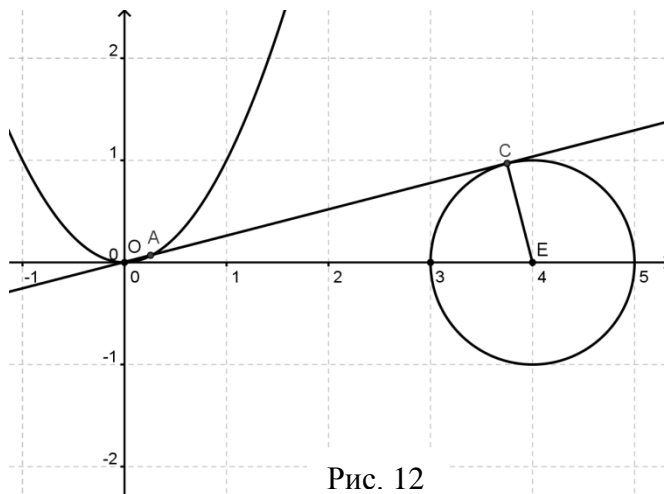


Рис. 12

$OC = OA + AC$. Равенство выполняется, если точка A параболы $y = x^2$ принадлежит отрезку OC . Единственное решение система имеет при условии касания прямой OC и ω . Уравнение касательной $x - \sqrt{15}y = 0$. Значения a находим из уравнения $a - \sqrt{15}a^2 = 0$. При $a = \frac{\sqrt{15}}{15}$ система имеет единственное решение.

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

11. Из условий $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 + z^2 = 16$ и $y^2 = xz$ для положительных x, y, z укажите значение выражения $xу + yz$.

Решение1. Рассмотрим векторы $\vec{a}(x; y)$ и $\vec{b}(z; -y)$. $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Из третьего равенства следует, что векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны. Рассмотрим вектор

$\vec{c}(y; z)$. Он перпендикулярен вектору \vec{b} , а, значит, коллинеарен вектору \vec{a} , и даже сонаправлен с ним (координаты положительны). Тогда $xу + yz = \vec{a} \cdot \vec{c} = 3 \cdot 4 = 12$.

Решение 2. Рассмотрим прямоугольные треугольники с общим катетом y и катетами x и z , лежащими на одной прямой (рис. 13). Из третьего равенства получаем, что угол $ACB = 90^\circ$ и ABC – прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4 и площадью, равной 6.

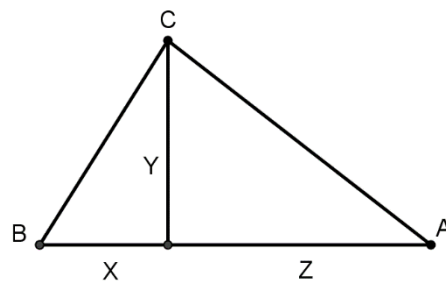


Рис. 13

Величина $xу + yz$ – удвоенная площадь. Она равна 12.

Ответ: 12.

12. Решите систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

Решение 1. Первое уравнение – уравнение плоскости ABC (рис. 14). Второе – уравнение сферы с центром $O(0; 0; 0)$ и радиусом $R = 1$.

Пирамида $OABC$ – правильная, $AO = \sqrt{3}$, $AB = \sqrt{6}$. Высота OH к основанию ABC равна 1, следовательно, точка H является точкой касания сферы и плоскости.

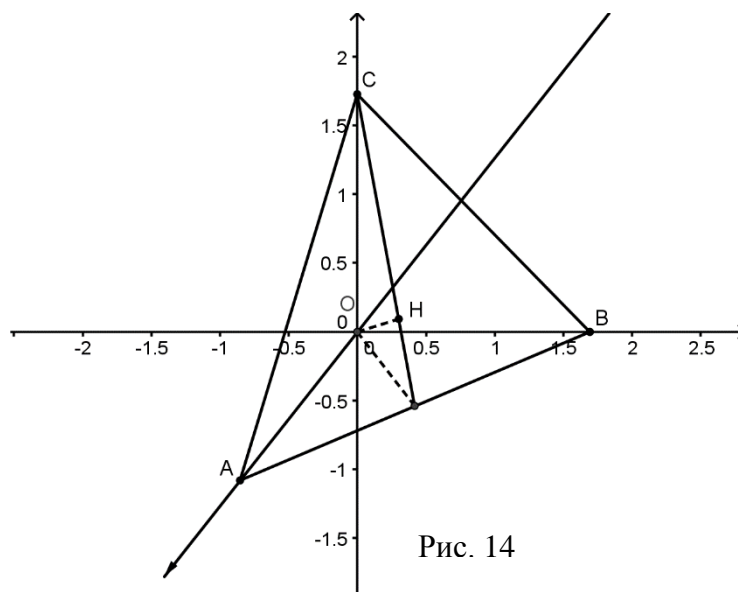


Рис. 14

Координаты $H(x_0, y_0, z_0)$ являются решениями данной системы. Проекции H легко найти, зная что H делит высоту треугольника ABC в отношении 2 : 1 от вершины C .

Решение 2. Можно применить вектор \vec{OH} , коллинеарный вектору $\{1; 1; 1\}$, тогда $x_0 = k, y_0 = k, z_0 = k$. Подставив эти координаты в уравнение плоскости, найдем $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Решение 3. Еще способ решения через скалярное произведение. Пусть $\vec{a}(x; y; z)$, $\vec{b}(1; 1; 1)$. Тогда $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$, векторы коллинеарны, их координаты пропорциональны. Значит, $x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ: $(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3})$.

13. Найдите наибольшее значение k , при котором имеет хотя бы одно решение

$$\text{система } \begin{cases} x + y + z = k \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y \leq 2k - 2. \end{cases}$$

Решение. Неравенство приведем к виду $x^2 + (y - 1)^2 + z^2 \leq 2k - 1$. В координатном пространстве это шар с центром $C(0; 1; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{2k - 1}$. Для решения задачи достаточно сравнить расстояние h от центра C до плоскости $x + y + z - k = 0$ и радиус шара. Хотя бы одно решение будет при условии $R \geq h$. Расстояние h найдем по формуле расстояния от точки до плоскости, $h = \frac{|1-k|}{\sqrt{3}}$. Получаем неравенство $k^2 - 8k + 4 \leq 0$, равносильное неравенству $R \geq h$ и имеющее наибольшее решение, равное $4 + 2\sqrt{3}$.

Ответ: $4 + 2\sqrt{3}$.

14. Докажите неравенство $\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \frac{ab}{c}$ для положительных чисел a ,

b , c , для которых оно имеет смысл.

Решение. Рассмотрим прямоугольные треугольники BCD с гипотенузой a и катетом c и ACD с гипотенузой b и катетом c (рис. 15). Получаем треугольник ABC с высотой $CD = c$ и основанием

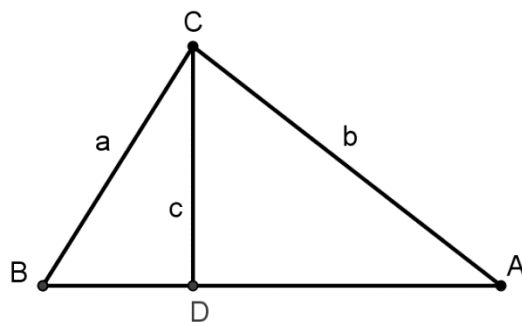


Рис. 15

$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}$. Тогда его площадь равна $\frac{(\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2}) \cdot c}{2}$, что не пре-

восходит площади прямоугольного треугольника с катетами a и b , откуда

$$\sqrt{a^2 - c^2} + \sqrt{b^2 - c^2} \leq \frac{ab}{c}.$$

15. Имеет ли решение в положительных числах система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4; \\ y^2 + yz + z^2 = 8; \\ z^2 + zx + x^2 = 36? \end{cases}$$

Решение 1. Рассмотрим три треугольника с углами 120° и прилежащими сторонами x и y , y и z , z и x соответственно (рис. 16). Получаем треугольник ABC со сторонами $2, 2\sqrt{2}, 6$, что противоречит неравенству треугольника.

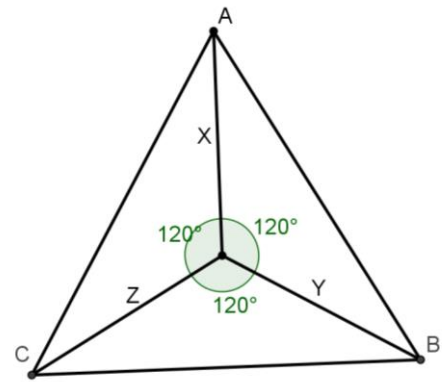


Рис. 16

Решение 2. Построим шестиугольник $ABCDFE$ (рис. 17), в котором $AB = x, BC = FE = y, CD = AE = z, \angle ABC = \angle BAE = \angle FEA = \angle BCD = 120^\circ$.

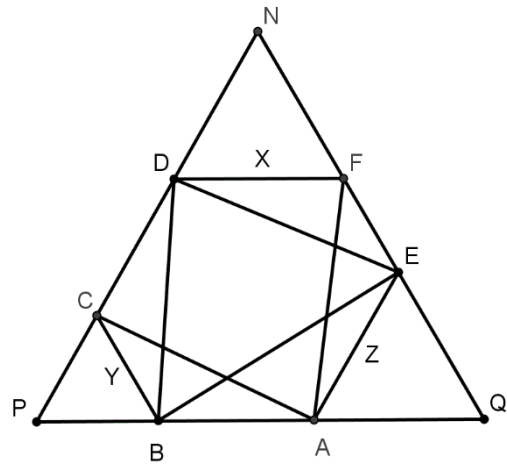


Рис. 17

Используя равенства системы и применяя теорему косинусов, находим стороны AC, BE, BD и AF в треугольниках ABC, BAE, BCD и AEF . $AC = 2, BE = 6,$

$BD = AF = 2\sqrt{2}$. Достроим шестиугольник до равностороннего треугольника PNQ , в котором $PN = x + y + z, DN = NF = DF = x$. Из равенства треугольников ABC и DFE следует, что $DE = AC = 2$. Тогда в треугольнике BDE оказывается противоречие в виде неравенства $BD + DE < BE$, что означает отсутствие решения системы.

16. Для положительных решений x, y, z системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$$

определите величину $xy + 2yz + 3xz$.

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник с катетами $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и z и гипотенузой 3, треугольник с углом 150° , прилежащими сторонами x и $\frac{y}{\sqrt{3}}$ и противолежащей стороной 5, треугольник с углом 120° , прилежащими сторонами x и z и противолежащей стороной 4 (рис. 18).

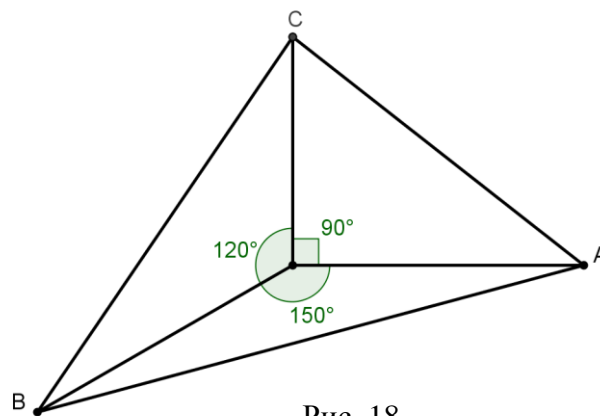


Рис. 18

Получаем треугольник ABC со сторонами 3, 4 и 5. Искомая величина в $4\sqrt{3}$ раз больше площади треугольника ABC и равна $24\sqrt{3}$.

Ответ: $24\sqrt{3}$.

17. Даны положительные числа a, b, c, d , причем $a > b > c > d$. Докажите, что

$$(a + b + c + d)^2 > a^2 + 3b^2 + 5c^2 + 7d^2.$$

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной $a + b + c + d$. Внутри квадрата можно расположить непересекающиеся квадрат со стороной a , три квадрата со стороной b , пять квадратов со стороной c и семь квадратов со стороной d (рис. 19)

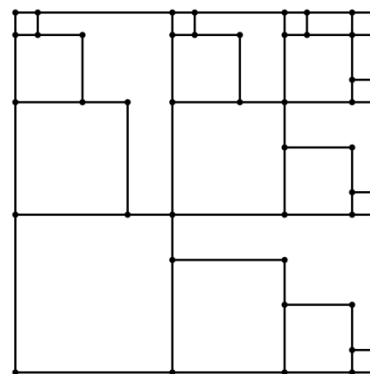


Рис. 19

18. Докажите неравенство

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \sqrt{3 \cdot 197} + \dots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

Решение. Рассмотрим среднюю часть двойного неравенства. Каждое слагаемое можно интерпретировать как высоту прямоугольного треугольника с гипотенузой 200. Рассмотрим четверть круга радиуса 100 и впишем ступенчатую фигуру из прямоугольников со стороной 1, лежащей на радиусе (рис. 20). Средняя часть – площадь этой фигуры. Она меньше площади четверти круга. Если рассмотреть ступенчатую фигуру, в которую вписана четверть круга, получим, что её площадь на 100 больше предыдущей фигуры, что завершает доказательство.

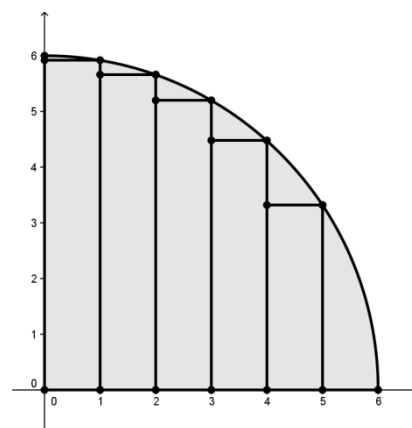


Рис. 20

Литература

1. Блинков, А. Д. Геометрия в негеометрических задачах [Текст] / А.Д. Блинков – М.: МЦНМО, 2016.
2. ЕГЭ 2008. Математика. Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Эксмо, 2008.
3. Единый государственный экзамен: Математика: Тренировочные задания [Текст] / Т.А. Корешкова, В.В. Мирошин, Н.В. Шевелёва – М.: Просвещение, Эксмо, 2005.
4. Задачи [Электронный ресурс] // Проект МЦНМО при участии школы 57 – Режим доступа: <http://www.problems.ru/> (09 марта 2018 г.).
5. Курьякова, Т.С. Применение векторно-координатного метода в школьном курсе алгебры [Текст] / Т.С. Курьякова, Н.И. Степанова // Учебное пособие. – Иркутск: Издательство ОАО НПО «Облмашинформ», 2000.