Лицей №36 ОАО «РЖД»

Семенова Л.И.

Методическое пособие для учащихся 9 классов для подготовки к участию в олимпиадных испытаниях с подробными решениями

Учебно-методическое пособие

Город Иркутск, 2022 год

УДК 531/534

ББК 22

Семенова Л.: Учебно-методическое пособие. – город Иркутск: Лицей №36 ОАО «РЖД», 2022. – 25с. Рецензент: к.т. н. Безрукова Я.В.

Выбор профессии для молодого человека одна из важнейших задач, которую он решает с переменным успехом. Интерес к будущей профессии зарождается в школьные годы. В этот период проявляются и активно развиваются склонности, способности, таланты. Физика в школе изучается с 7 класса, а серьезное участие в олимпиадах начинается с 9 класса. Следовательно, возникший разрыв необходимо устранить на школьном уровне. Заинтересовать учащегося, вовлечь в олимпиадное движение, не потерять уникальность мышления, развить и привить определенные навыки, это задача учителя.

Олимпиадные задания отличаются от «обычных» задач по многим параметрам. Условия задач оригинальны и требуют нестандартного мышления и высокого уровня эрудиции.

Данное методическое пособие ориентированно на самостоятельную подготовку к олимпиадным испытаниям муниципального и регионального уровня. Изложенные задачи были представлены на различных олимпиадах по физике, решения являются авторскими.

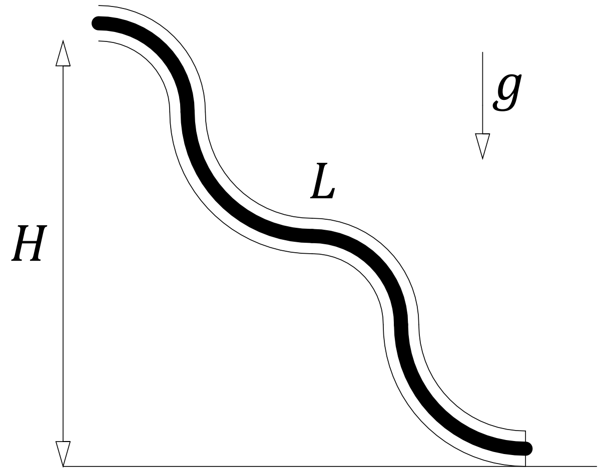
В пособие включены условия и решения олимпиадных задач, для самостоятельной подготовки к олимпиадным испытаниям муниципального и регионального уровня (по механике и электричеству). Каждая предложенная задача сопровождается подробным разбором решения.

Пособие предназначено для школьников, интересующихся физикой, и учителей средних общеобразовательных школ

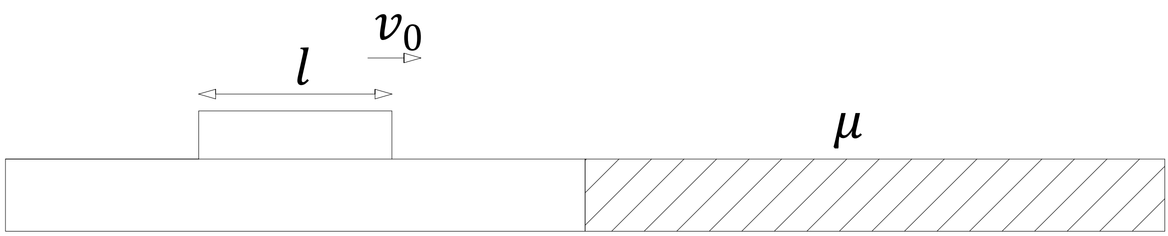
Содержание

Задания из раздела «Механика»

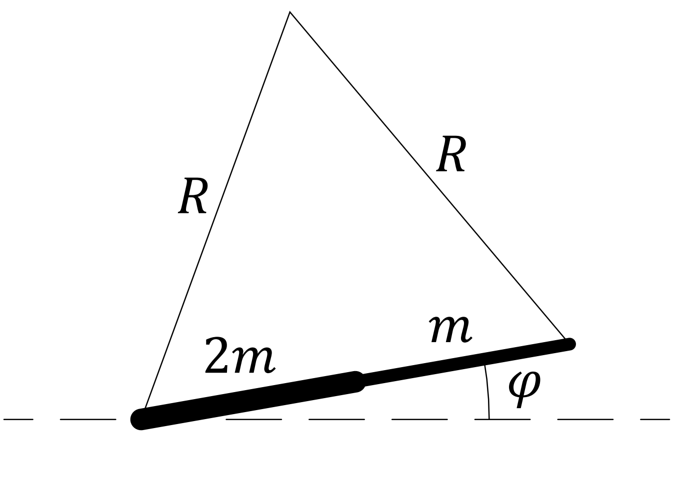
Задача №1 Массивный нерастяжимый однородный канат удерживается в трубе как показано на рисунке. Один конец трубы поднят над вторым на высоту H. Длина трубы равна L, ускорение свободного падения g. Канат отпускают. Найти ускорение каната в начальный момент времени, трения нет.



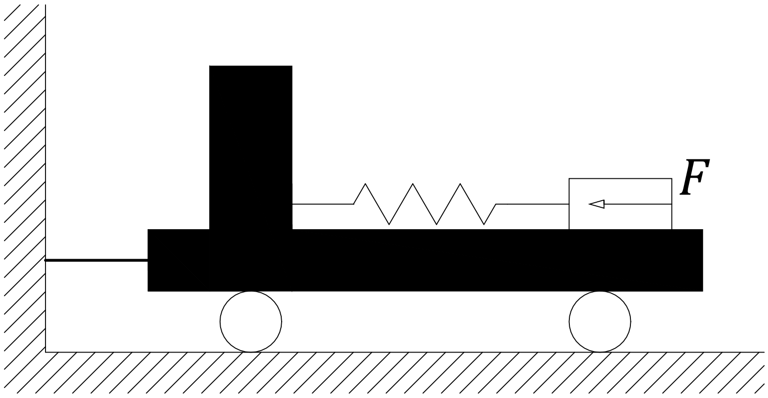
Задача №2 Прямоугольная однородная доска длины l едет по инерции по гладкой горизонтальной поверхности и наезжает со скоростью v_0 на шероховатую поверхность с коэффициентом трения μ. На какое расстояние доска заедет на шероховатую поверхность? Ускорение свободного падения g, расстояние отсчитывать от переднего края доски.



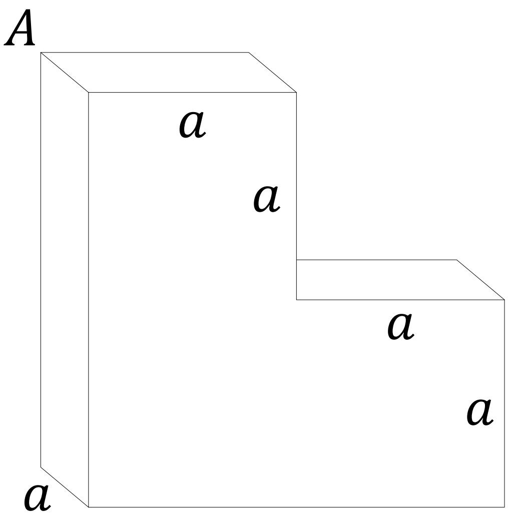
Задача №3 Стержень длины R состоит из двух однородных кусков одинаковой длины, один из которых имеет вдвое большую массу. Стержень подвешен за концы на двух нитях длины R, прикреплённых к гвоздю. Какой угол φ с горизонталью образует стержень в положении равновесия?



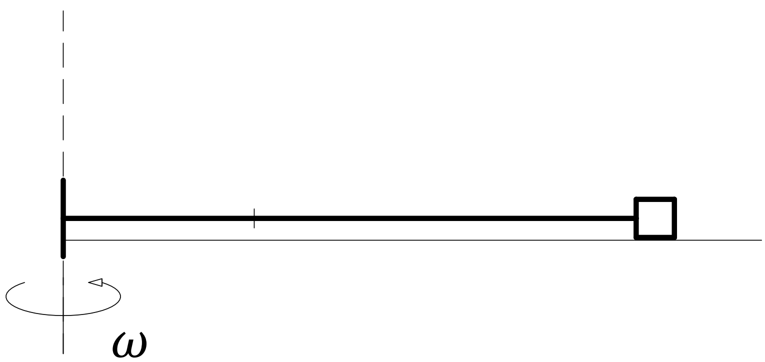
Задача №4 Тележка соединена со стеной жёстким стержнем. К её упору прикреплена пружина, другой конец которой связан с бруском. Вначале пружина не деформирована. На брусок в течении некоторого времени действует горизонтальная сила F, направленная вдоль тележки. После прекращения действия силы брусок ещё некоторое время смещается в сторону упора и возвращается, остановившись в исходной точке. Сила трения, действующая на брусок со стороны тележки, равна f. Найти силу N, с которой тележка давит на стержень в момент прекращения действия силы F, и N_{max}.



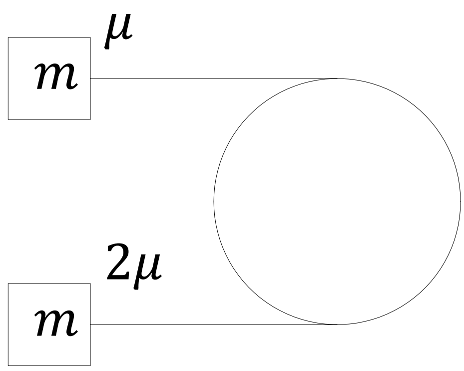
Задача №5 Сосуд данной формы с шириной a и без дна покоится на горизонтальной поверхности и плотно с ней соприкасается. Через небольшое отверстие в точке А в сосуд заливается жидкость плотности ρ. Какой уровень жидкости будет в левой части сосуда в момент, когда жидкость начнёт подтекать из под сосуда? Масса сосуда m, ускорение свободного падения g.



Задача №6 Тело массой m привязано к нерастяжимому однородному канату длиной l и массой $3m$. Второй конец каната прикреплён к вертикальному стержню так, что канат расположен горизонтально. Тело раскручивают до угловой скорости ω. Найти силу натяжения каната в точке на расстоянии $\frac{l}{3}$ от точки крепления к поверхности, трения нет, размеры тела малы, канат на стержень не накручивается.

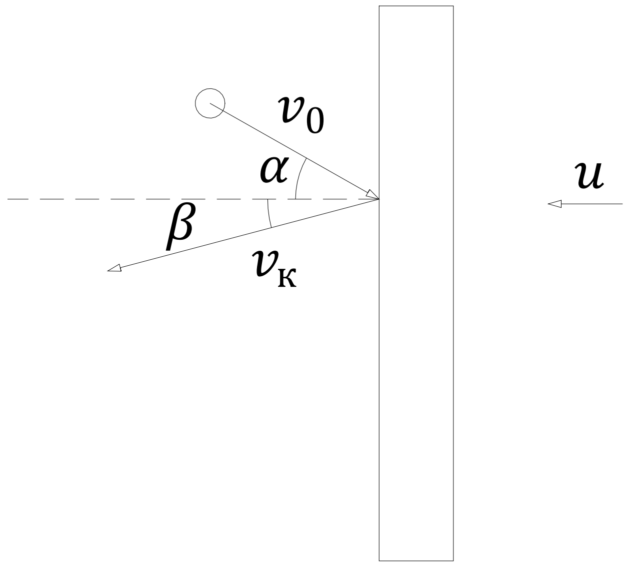


Задача №7 Два тела одинаковой массы, связанные лёгкой нерастяжимой нитью, покоятся на поверхности, коэффициент трения верхнего тела о поверхность μ, нижнего 2μ. Нить перекинута через лёгкий блок. С каким минимальным ускорением необходимо тянуть блок, чтобы оба тела сдвинулись с места? Ускорение свободного падения g.



Задача №8 С вершины закреплённой на горизонтальной поверхности полусферы без трения скатывается небольшое тело. Найти угол, который составит радиус полусферы, проведённый к точке отрыва груза от неё, с вертикальной прямой.

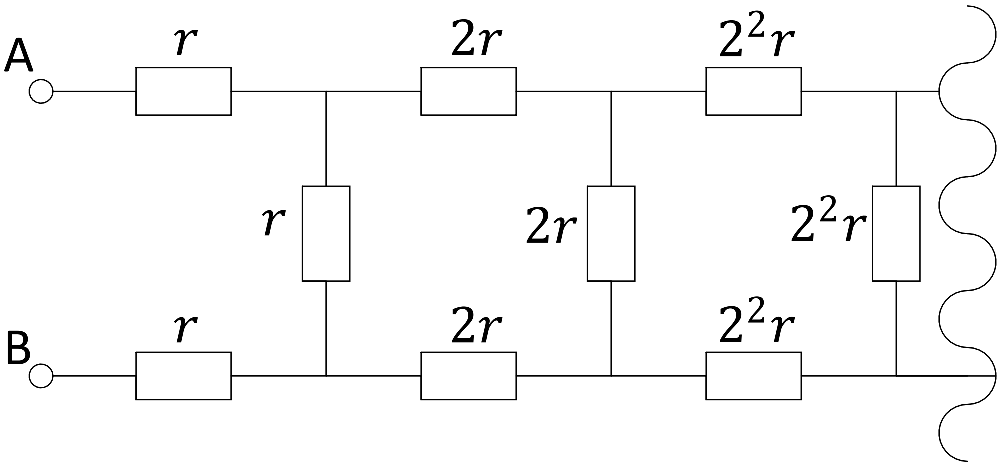
Задача №9 На массивную стену, двигающуюся со скоростью u, налетает лёгкий шарик со скоростью v_0. α – угол между вектором v_0 и перпендикуляром к поверхности стены, β – угол между вектором конечной скорости и перпендикуляром к поверхности стены. $\tan\alpha = \frac{1}{3}$, $\tan\beta = \frac{1}{4}$. Найти u, если известна v_0. Удар абсолютно упругий.



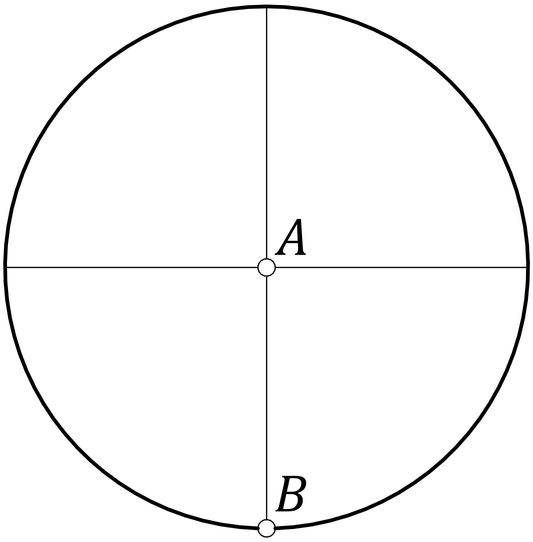
Задача №10 Бортовой компьютер электрички показывает среднюю скорость на участке, пройденном между соседними опорами, поддерживающими контактный провод. Расстояния между всеми опорами одинаковы. Электричка начинает движение из состояния покоя с постоянным ускорением. Через некоторое время бортовой компьютер показал $v_1 = 20$ км/ч. На следующем участке бортовой компьютер показал $v_2 = 30$ км/ч. Найти мгновенную скорость u электрички на границе этих участков.

Задания из раздела «Электричество»

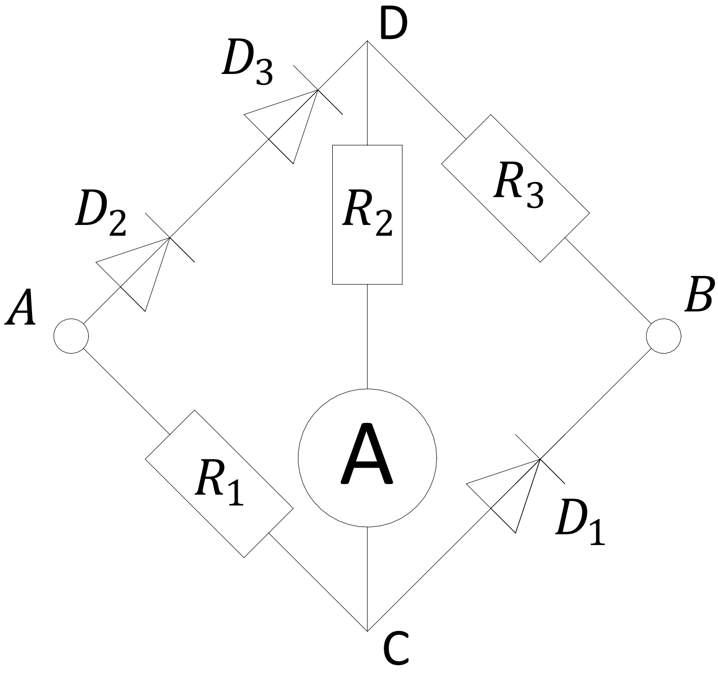
Задача №1 Дана бесконечно большая цепь, показанная на рисунке. Определить сопротивление этой цепи при подключении через точки А и В. Считать r известным.



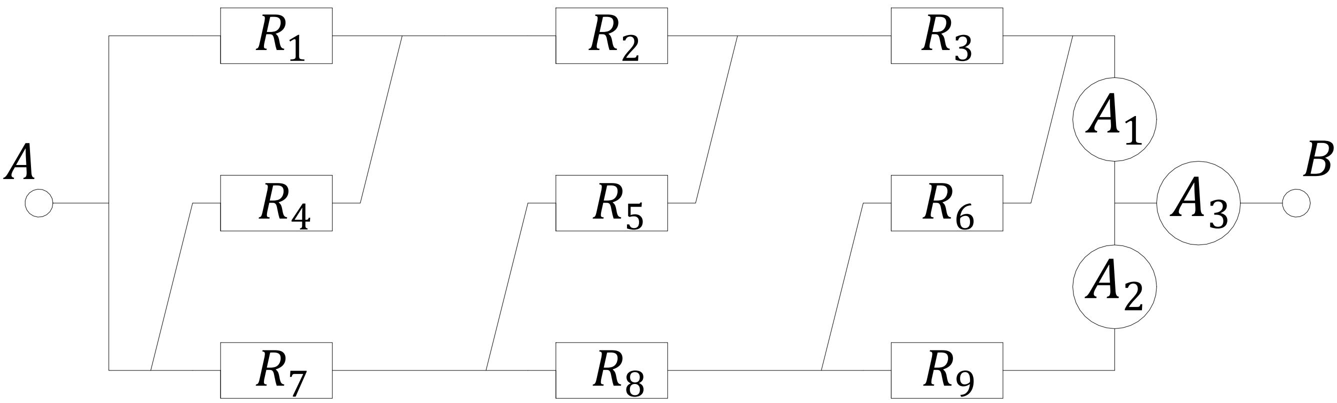
Задача №2 Из проволоки, сопротивление единицы длины которой равно 2λ, изготовили кольцо радиуса R. Из другой проволоки, сопротивление единицы длины которой равно λ, изготовили 2 прямых проводника длиной $2R$ и присоединили к кольцу как показано на рисунке. Найти сопротивление при подключении к точкам А и В.



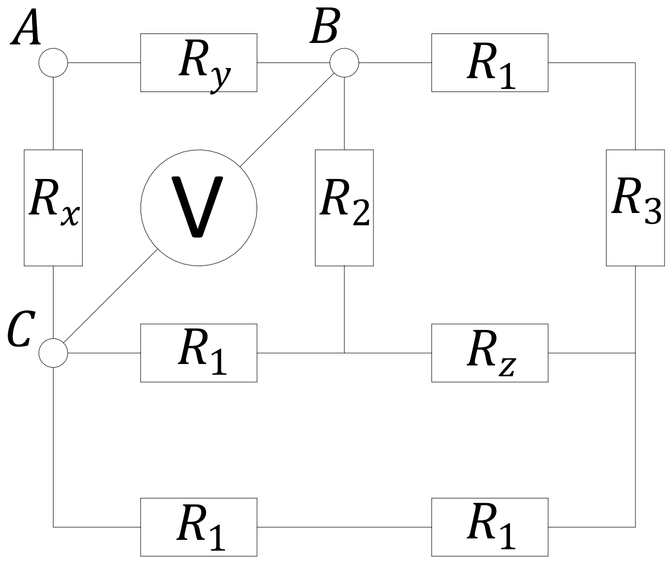
Задача №3 На рисунке изображена электрическая цепь, состоящая из 3 одинаковых резисторов, 3 диодов с напряжением открытия U_0 и идеального амперметра. Сопротивление резисторов R. К точкам А и В прикладывают различное напряжение U_{AB}. Найти зависимость тока через амперметр от U_{AB}.



Задача №4 Все резисторы данной электрической цепи имеют одинаковые сопротивления. При подключении к точкам А и В источника тока, через амперметр A_3 идёт ток 9мА. Найти токи через амперметры A_1 и A_2, все амперметры идеальные.



Задача №5 Дана электрическая цепь, где R_x, R_y, R_z – неизвестны, $R_1 = 1$кОм, $R_2 = 2$кОм, $R_3 = 3$кОм, вольтметр идеальный. К точкам A и B подключают источник постоянного напряжения $U_0 = 10$В, показания вольтметра $U_1 = 4$В. Если тот же источник подключить к точкам A и C, показания вольтметра будут $U_2 = 5$В. Найти R_x, R_y, R_z, ток через цепь в обоих вариантах подключения I_{AB}, I_{AC}.



Решение заданий из раздела «Механика»

Задача №1

Так как канат однородный, введём его линейную плотность ρ (отношение единицы массы к единице длины).

Рассмотрим перемещение каната за малое время Δt. Так как Δt мало, можно считать, что канат движется равноускорено со своим начальным ускорением a. Ускорение для всех участков каната будет одинаковым, так как он нерастяжим. Из этого следует, что смещение каната за время Δt: $\Delta l = \frac{a\Delta t^2}{2}$, скорость каната через время Δt: $v = a\Delta t$

Запишем закон сохранения энергии для начального момента и через время Δt: $\Delta E_к = \Delta E_п$. (Кинетическая энергия прибавляется за счет убавления потенциальной энергии)

Если рассмотреть начальное положение каната и его положение через время Δt, то заметно, что для расчёта потенциальной энергии можно считать, что только верхняя малая часть каната длиной Δl переместилась вниз. (если наложить 2 положения каната, то различия будут только сверху на Δl и снизу на Δl). В силу малости перемещения Δl можно считать, что разность высот этих участков каната длиной Δl равна H. Тогда $\Delta E_п = \Delta mgH$, где Δm – масса участка каната длины Δl.

$\Delta E_к = \frac{mv^2}{2}$, где m – масса каната.

$m = \rho L$ (так как длина каната равна длине трубы)

$$\Delta m = \rho \Delta l$$

$$\Delta mgH = \frac{mv^2}{2}$$

$$\Delta lgH = \frac{Lv^2}{2}$$

Подставим Δl и v, выраженные через Δt:

$$\frac{a\Delta t^2}{2} gH = L\frac{a^2\Delta t^2}{2}$$

Отсюда $a = g\frac{H}{L}$

Задача №2

Запишем стандартную формулу силы трения: $F_{тр} = \mu N_ш$. $N_ш$ (сила нормальной реакции шероховатой поверхности) зависит от того, какая часть доски в этот момент находится на шероховатой поверхности. Запишем 2 закон Ньютона для этой части доски: $\vec{F}_{тяж.части\ доски} + \vec{N}_ш = 0$. В проекции на вертикальную оу: $m_{части\ доски}g = N_ш$

Так как доска однородна, введём линейную плотность доски ρ, длина доски, которая находится на шероховатой поверхности, x, массу доски m. Тогда $m = \rho l$, $m_{\text{части доски}} = \rho x$, следовательно, $m_{\text{части доски}} = \frac{mx}{l}$

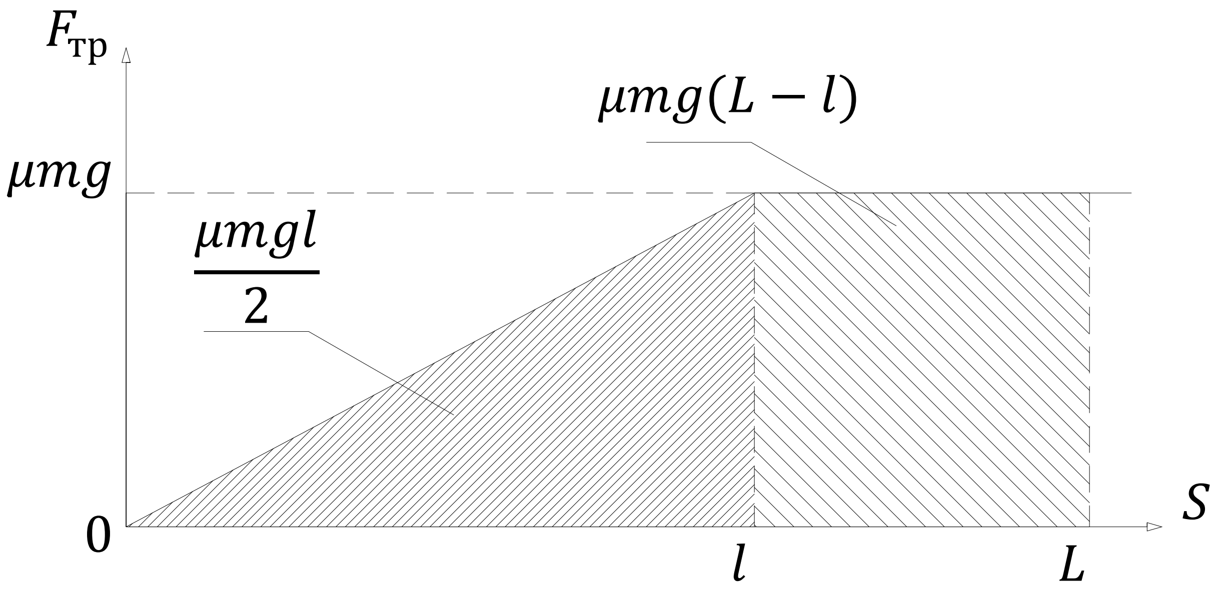
$$F_{\text{тр}} = \mu mg \frac{x}{l}$$

$$F_{\text{тр}\ max} = \mu mg$$

$F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}\ max}$ всё время движения после того момента, как доска полностью заехала на шероховатую поверхность. Пусть расстояние, которое доска проехала по шероховатой поверхности, равно L. Тогда это условие записывается как $L \geq l$

При $L < l$, $L = x$, следовательно, $F_{\text{тр}} = \frac{\mu mgL}{l}$

Нарисуем график зависимости $F_{\text{тр}}$ от S пути доски:



Работа силы трения есть площадь под этим графиком.

По закону сохранения энергии $A - E_{\text{к}} = 0$,

$$A = E_{\text{к}} = \frac{m{v_0}^2}{2}$$

Рассмотрим два случая: 1) доска в итоге не полностью заехала на шероховатую поверхность 2) доска смогла полностью заехать на шероховатую поверхность.

Найдём условие, при котором доска полностью заедет на шероховатую плоскость. Для этого кинетическая энергия должна превысить работу силы трения за перемещение на l: $E_{\text{к}} \geq A_l$

$$\frac{m{v_0}^2}{2} \geq \frac{\mu mgl}{2}$$

$v_0 \geq \sqrt{\mu gl}$ – случай 2), $v_0 < \sqrt{\mu gl}$ – случай 1).

L – расстояние, которая в итоге проехала доска

1) $L < l$

$$A = S_{\text{под графиком}} = \frac{\mu m g L^2}{2} = \frac{m{v_0}^2}{2}$$

Отсюда $L = v_0\sqrt{\frac{l}{\mu g}}$ при $v_0 < \sqrt{\mu g l}$

2) $L \geq l$

$$A = S_{\text{под графиком}} = \frac{\mu m g l}{2} + \mu m g(L - l) = E_{\text{к}}$$

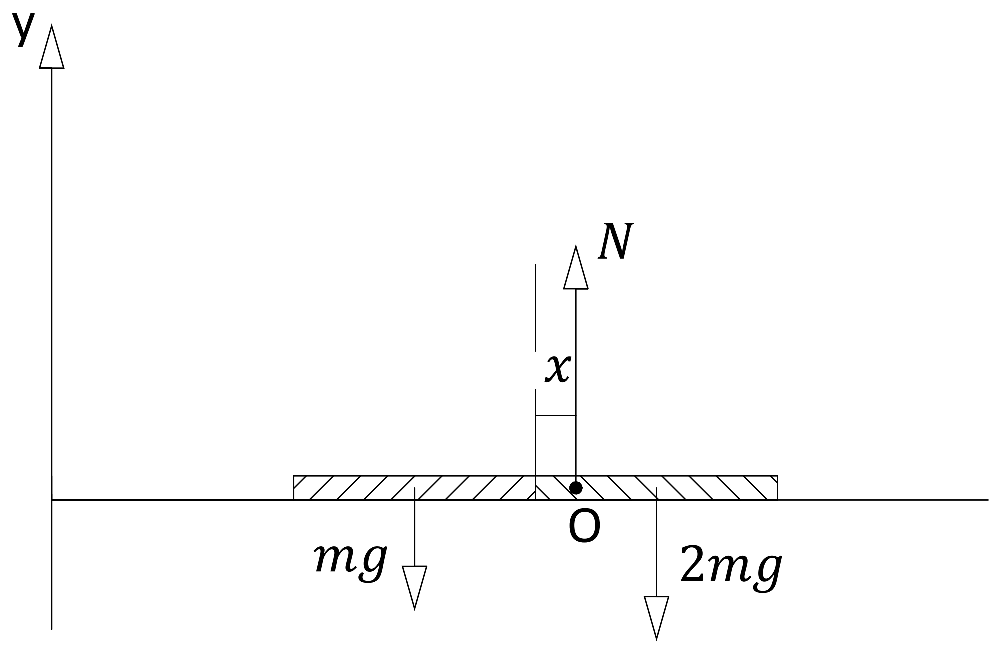
$$\frac{\mu m g l}{2} + \mu m g(L - l) = \frac{m{v_0}^2}{2}$$

отсюда $L = \frac{{v_0}^2}{2\mu g} + \frac{l}{2}$ при $v_0 \geq \sqrt{\mu g l}$

Задача №3

Все углы треугольника, составленного из нитей и стержня, равны 60°, так как треугольник равносторонний.

Для нахождения центра масс стержня (ищем центр масс, чтобы использовать две силы тяжести как одну) расположим его на горизонтальной поверхности (см. рис) (О-центр масс) (сила N приложена к точке О так как должна компенсировать суммарную силу тяжести, действующую на стержень в этой точке)

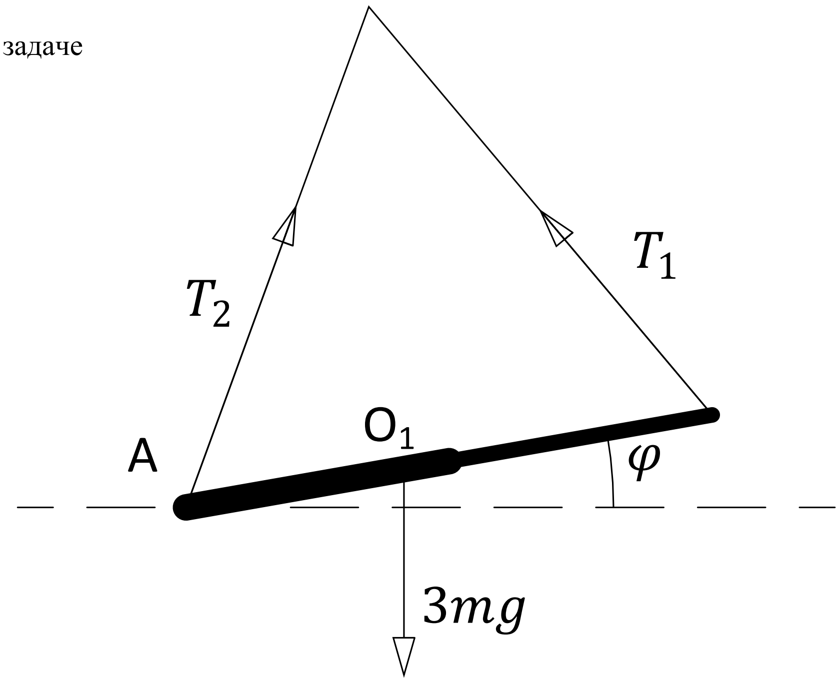


правило моментов относительно точки О:

$$mg(x+\frac{R}{4}) = 2mg(\frac{R}{4}-x)$$

отсюда $x=\frac{R}{12}$

вернёмся к задаче



правило моментов относительно точки O_1:

$$T_1(\frac{R}{2}+x)\sin 60° = T_2\,(\frac{R}{2}-x)\sin 60°$$

Отсюда $T_2=\frac{7}{5}T_1$

Правило моментов относительно точки А: $3mg(\frac{R}{2}-x)\cos\varphi = T_1R\sin 60°$

Нарисуем векторный треугольник (сумма векторов сил, действующих на стержень, равна нулю)

$$\vec{T}_1+\vec{T}_2+3m\vec{g}=0$$

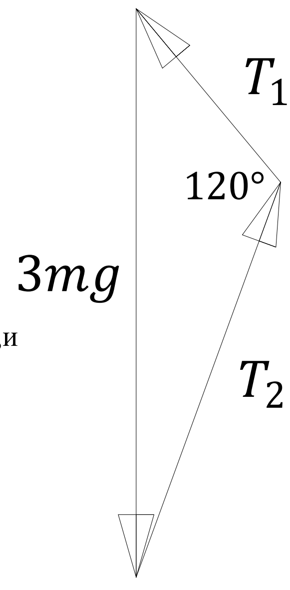
По теореме косинусов: $(3mg)^2 = {T_1}^2+{T_2}^2-2T_1T_2\cos 120°$

Подставляя $T_2=\frac{7}{5}T_1$ и решая уравнение

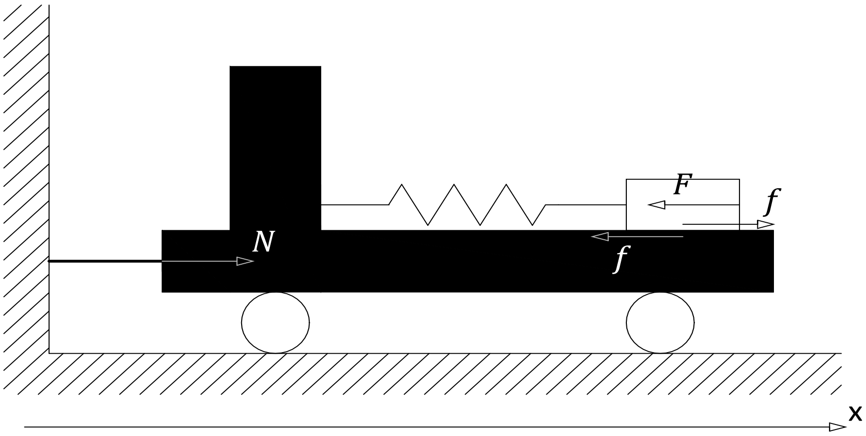
$9m^2g^2 = {T_1}^2+\frac{49}{25}{T_1}^2+\frac{14}{5}{T_1}^2\cos 60°$, получим $T_1=\frac{15mg}{\sqrt{109}}$

Подставив $T_1=\frac{15mg}{\sqrt{109}}$ в правило моментов относительно точки А,и решив уравнение $\frac{15}{12}mgR\cos\varphi = \frac{15}{\sqrt{109}}mgR\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем $\cos\varphi=\frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{109}}$

$$\varphi\approx 5{,}5°$$



Задача №4



Пусть k – жёсткость пружины, x – смещение груза за время действия силы F, $x + \Delta x$ – максимальное смещение груза.

По закону сохранения энергии для движения вперёд: $A_F - A_f = E_{пр}$

$$E_{пр} = \frac{k(x+\Delta x)^2}{2}$$

$$A_F = Fx$$

$$A_f = f(x+\Delta x)$$

$$Fx = f(x+\Delta x) + \frac{k(x+\Delta x)^2}{2}$$

По закону сохранения энергии для движения назад: $E_{пр} = A'_f$

$$A'_f = f(x+\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x) = \frac{k(x+\Delta x)^2}{2}$$

$$x + \Delta x = \frac{2f}{k}$$

$$k(x+\Delta x) = 2f$$

$$Fx = \frac{2f^2}{k} + \frac{2f^2}{k} = \frac{4f^2}{k}$$

$$kx = \frac{4f^2}{F}$$

По 3 закону Ньютона, сила f порождает такую же силу, действующую на тележку в обратном направлении f_1: $\vec{f} = -\vec{f_1}$

2 закон Ньютона для тележки в проекции на горизонтальную ох:

в момент прекращения действия F: $N = kx + f_1$

в момент максимального смещения: $N_{max} = k(x + \Delta x) + f_1$

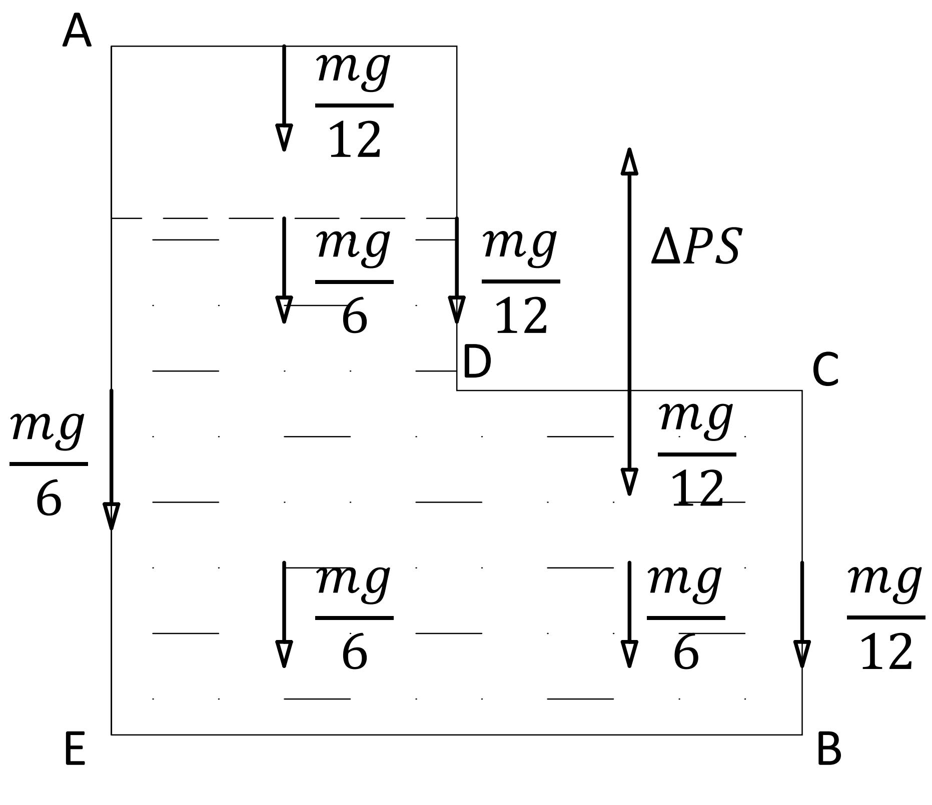
N максимальна в этот момент, потому что она тем больше, чем больше сила упругости пружины, которая тем больше, чем больше смещение, максимальное смещение – это $x + \Delta x$.

$$N = \frac{4f^2}{F} + f$$

$$N_{max} = 2f + f = 3f$$

Задача №5

Из-за чего начинает подтекать жидкость? Из-за того, что сосуд приподнимается силой давления на грань CD, создаваемой более высоким уровнем воды в правой части сосуда. Значит, сосуд проворачивается относительно точки E, следовательно, вода начинает подтекать в точке B.



Разделим сосуд на грани со сторонами $a \times a$, всего их получается 12. Следовательно, каждая грань имеет массу $\frac{m}{12}$

Δh - уровень воды в левом колене по сравнению с уровнем грани BC.

Запишем правило моментов относительно точки E:

$$\frac{mg}{6}\frac{a}{2}+\frac{mg}{6}\frac{a}{2}+\frac{mg}{12}\frac{a}{2}+\frac{mg}{12}a+\frac{mg}{12}\frac{3a}{2}+\frac{mg}{6}\frac{3a}{2}+\frac{mg}{12}2a=\Delta PS\frac{3a}{2}$$

$$\Delta P=(P_0+\rho g\Delta h)-P_0=\rho g\Delta h$$

$$S=a^2$$

Найдём сочетание параметров, при котором описанная ситуация возможна, так как нужно учитывать, что $\Delta h\le a$

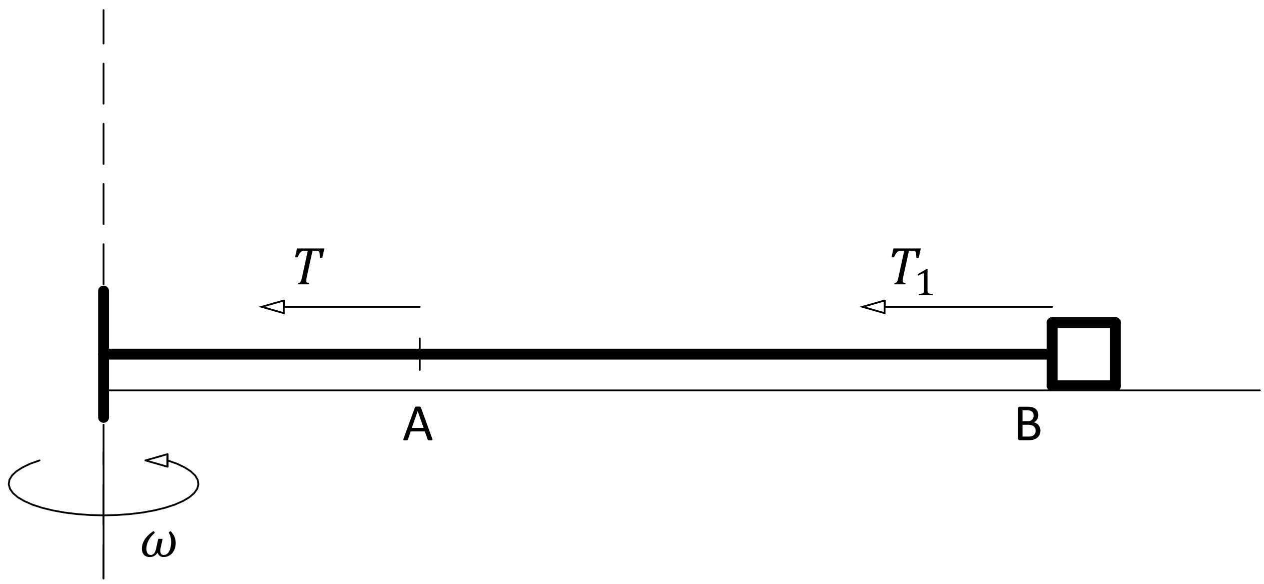
Решая уравнение правила моментов, приходим к $\Delta h=\frac{10}{18}\frac{m}{\rho a^2}$

$$\frac{10}{18}\frac{m}{\rho a^2}\le a$$

Ситуация возможна при $\frac{m}{\rho a^3}\le 1{,}8$

$H=a+\Delta h=a+\frac{10}{18}\frac{m}{\rho a^2}$ при $\frac{m}{\rho a^3}\le 1{,}8$; иначе задача ответа не имеет.

Задача №6



По 2 закону Ньютона для тела: $m\vec{a}_{\text{ц тела}}=\vec{T}_1+m\vec{g}+\vec{N}$

В проекции на ось горизонтальную ox: $ma_{\text{ц тела}}=T_1$

$$a_{\text{ц тела}}=\omega^2 l$$

Для части каната AB работает теорема о движении центра масс, из которой следует, что $\vec{a}_{\text{ц }AB}$ приложено к центру масс отрезка AB. Так как канат однородный, центр масс отрезка AB расположен в середине отрезка AB.

$$\vec{a}_{\text{ц}\,AB} = \omega^2 \frac{2}{3} l$$

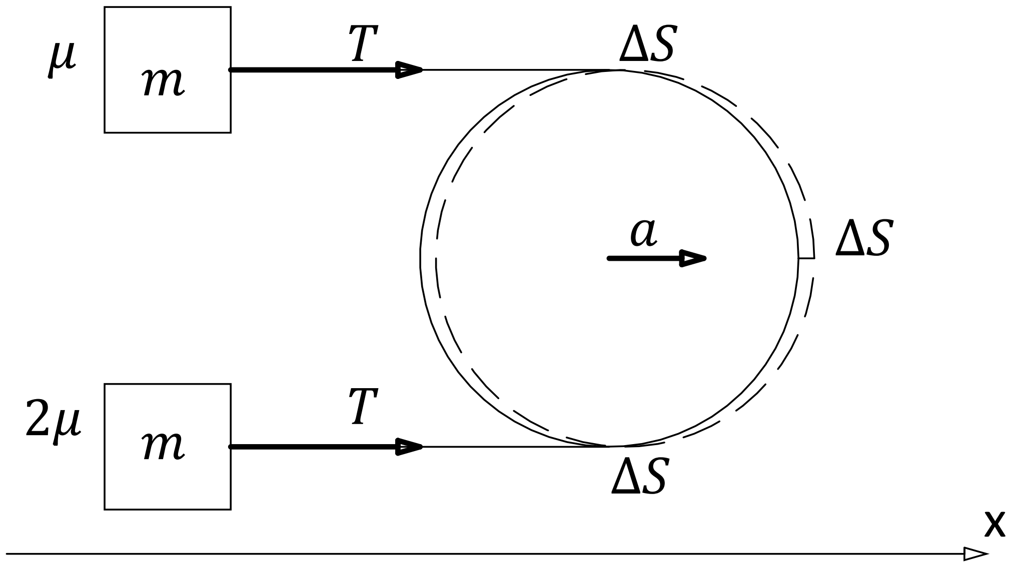
Запишем 2 закон Ньютона для части каната АВ в проекции на ох: $m_{AB} a_{\text{ц}\,AB} = T - T_1$

$$m_{AB} = \frac{2}{3} m_{\text{к}} = 2m$$

Сложив уравнения 2 законов Ньютона, получим $T = m a_{\text{ц тела}} + 2m a_{\text{ц}\,AB}$

$$T = \frac{7}{3} m \omega^2 l$$

Задача №7



Рассмотрим перемещения блока и брусков за малый промежуток времени Δt. За это время блок пройдёт путь $\Delta S = \frac{a \Delta t^2}{2}$. Перемещение блока растягивает нить, причём $\Delta S_{\text{нити}} = 2\Delta S$ (так как нить должна растянутся в двух местах). Очевидно, что нижнее тело будет двигаться медленнее верхнего, значит, при a_{min} его ускорение будет очень мало $a_{\text{н}} \approx 0$.

Из-за того, что нить нерастяжима, растяжение нити должно сопровождаться её сжатием. Это происходит за счёт перемещения тел. $\Delta S_{\text{нити}} = \Delta S_{\text{н}} + \Delta S_{\text{в}} = \frac{a_{\text{в}} \Delta t^2}{2} + \frac{a_{\text{н}} \Delta t^2}{2} = \frac{a_{\text{в}} \Delta t^2}{2}$

$$a \Delta t^2 = \frac{a_{\text{в}} \Delta t^2}{2} \frac{a_{\text{в}} \Delta t^2}{2}$$

$$a = \frac{a_{\text{в}}}{2}$$

По 2 закону Ньютона для нижнего тела в проекции на ох: $F_{\text{тр н}} - T = m a_{\text{н}} \approx 0$

$$F_{\text{тр н}} = 2\mu N = 2\mu mg$$

$$F_{\text{тр н}} = T = 2\mu mg$$

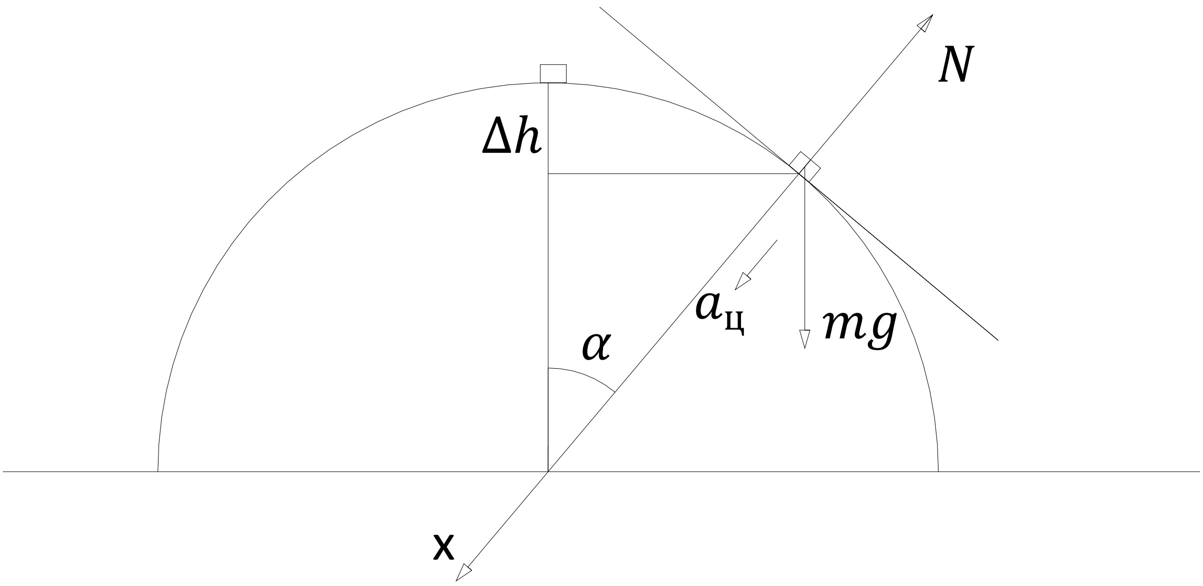
По 2 закону Ньютона для верхнего тела в проекции на ox: $T - F_{\text{тр в}} = ma_{\text{в}}$

$$F_{\text{тр в}} = \mu N = \mu mg$$

$$a_{\text{в}} = \frac{T - F_{\text{тр в}}}{m} = \frac{2\mu mg - \mu mg}{m} = \mu g$$

$$a = \frac{a_{\text{в}}}{2} = \frac{\mu g}{2}$$

Задача №8



Рассмотрим силы, действующие на тело в момент отрыва от полусферы.

Так как тело оторвалось от поверхности, $N = 0$

Запишем для тела 2 закон Ньютона: $m\vec{a} = m\vec{g}$

В проекции на ox (ось по радиусу): $ma_{\text{ц}} = mg\cos\alpha$

$$a_{\text{ц}} = g\cos\alpha$$

По закону сохранения энергии: $mg\Delta h = \frac{mv^2}{2}$

$$v^2 = 2g\Delta h$$

$$\Delta h = R - R\cos\alpha$$

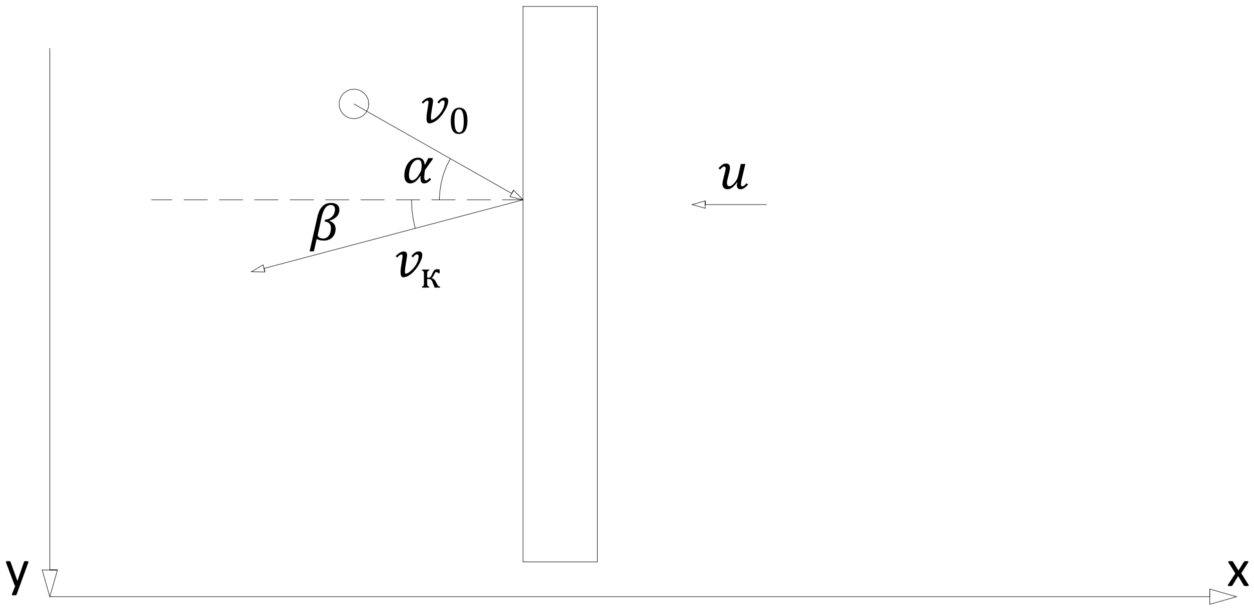
$$a_{ц} = \frac{v^2}{R}$$

Подставим эти выражения во 2 закон Ньютона: $\frac{2gR(1-\cos\alpha)}{R} = g\cos\alpha$

$$2 - 2\cos\alpha = \cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{3}$$

Задача №9



По закону сохранения импульса: $\vec{p}_{ст\ 0} + \vec{p}_{ш\ 0} = \vec{p}_{ст\ к} + \vec{p}_{ш\ к}$

В проекции на оу: $mv_{0\ y} = mv_{к\ y}$

$$v_{0\ y} = v_{к\ y}$$

$$v_0 \sin\alpha = v_к \sin\beta$$

В проекции на ох: $Mu_0 - mv_{0\ x} = Mu_к + mv_{к\ y}$

Так как $M \gg m$, слагаемыми с m можно пренебречь:

$$Mu_0 = Mu_к$$

$$u_0 = u_к = u$$

Из того, что стена двигается с постоянной скоростью u ($u_0 = u_к = u$), система отсчёта, связанная с ней, будет являться инерциальной.

При абсолютно упругом ударе работает закон сохранения энергии.

Запишем закон сохранения энергии в инерциальной системе отсчёта стены: $E_{кин\ ш\ 0} = E_{кин\ ш\ к}$

$$\frac{m(|\vec{v}_0 - \vec{u}|)^2}{2} = \frac{m(|\vec{v}_к - \vec{u}|)^2}{2}$$

$$|\vec{v}_0 - \vec{u}| = |\vec{v}_к - \vec{u}|$$

Сложим вектора по правилам геометрии, получаем, что $|\vec{v}_0 - \vec{u}| = \sqrt{{v_{0\,y}}^2 + (v_{0\,x} + u)^2}$ и $|\vec{v}_к - \vec{u}| = \sqrt{{v_{к\,y}}^2 + (v_{к\,x} - u)^2}$

$${v_{0\,y}}^2 + (v_{0\,x} + u)^2 = {v_{к\,y}}^2 + (v_{к\,x} - u)^2$$

С учётом $v_{0\,y} = v_{к\,y}$

Отсюда $v_{к\,x} = v_{0\,x} + 2u$ (это общая формула столкновений подобного вида (лёгкий шарик об движущуюся массивную стену))

Из разложений векторов скоростей на компоненты по ох и оу следует, что:

$$\tan\alpha = \frac{v_{0\,y}}{v_{0\,x}}$$

$$\tan\beta = \frac{v_{к\,y}}{v_{к\,x}}$$

$$\frac{\tan\alpha}{\tan\beta} = \frac{v_{к\,x}}{v_{0\,x}} = \frac{4}{3}$$

$$v_{к\,x} = \frac{4}{3} v_{0\,x}$$

$$\frac{4}{3} v_{0\,x} - v_{0\,x} = 2u$$

$$u = \frac{1}{6} v_{0\,x} = \frac{1}{6} v_0 \cos\alpha$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$u = \frac{v_0}{2\sqrt{10}}$$

Задача №10

Так как оба участка пути имели одинаковую длину, $S_{\tau_1} = S_{\tau_2}$

$$S = v_1\tau_1 = v_2\tau_2$$

$$\tau_2 = \frac{v_1}{v_2}\tau_1$$

$$S = v_1\tau_1$$

Теперь выразим путь в первом и втором случае через u

$$S = u\tau_2 + \frac{a{\tau_2}^2}{2} = \left(\frac{u\tau_1 v_2}{v_1} + \frac{a{\tau_1}^2}{2}\right)\frac{{v_1}^2}{{v_2}^2} = v_1\tau_1$$

$$v_1\tau_1\frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} = u\tau_1\frac{v_2}{v_1} + \frac{a{\tau_1}^2}{2}$$

$S = u\tau_1 - \frac{a{\tau_1}^2}{2}$ – это полезная формула пути через конечную скорость, выводится она с помощью подстановки в стандартную формулу $v_0 = v_к - at; S = (v_к - at)t + \frac{at^2}{2} = v_к t - \frac{at^2}{2}$

$$\frac{a{\tau_1}^2}{2} = u\tau_1 - S = u\tau_1 - v_1\tau_1$$

$$v_1\tau_1\frac{{v_2}^2}{{v_1}^2} + v_1\tau_1 = u\tau_1\frac{v_2}{v_1} + u\tau_1$$

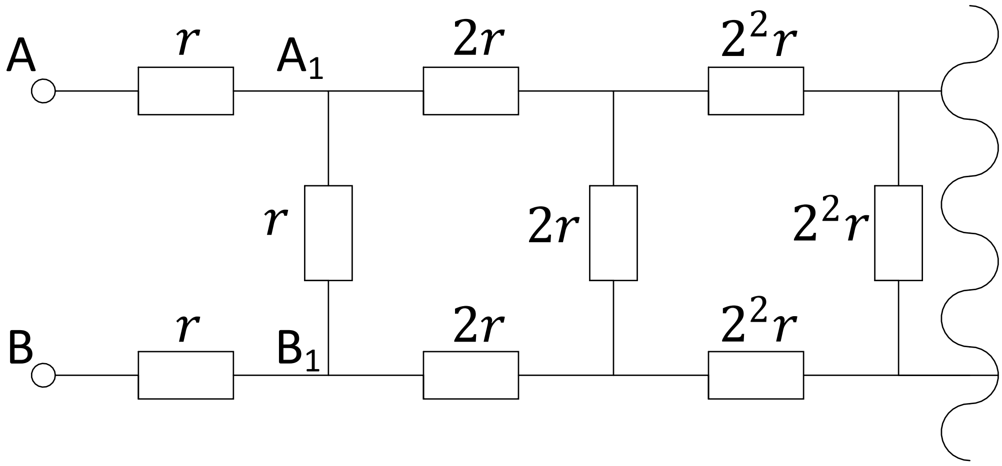
$$v_1\frac{{v_1}^2 + {v_2}^2}{{v_1}^2} = u\frac{v_1 + v_2}{v_1}$$

$$u = \frac{{v_1}^2 + {v_2}^2}{v_1 + v_2} = 26 \text{ км/ч}$$

Решение заданий из раздела «Электричество»

Задача №1

Заметим, что если убрать первые три резистора r, то сопротивление всей цепи возрастёт в 2 раза, потому что каждый её элемент увеличит сопротивление в 2 раза. Пусть искомое сопротивление R_x, тогда сопротивление цепи без первых трёх резисторов r равно $2R_x$



$$R_{AB} = r + R_{A_1B_1} + r$$

$$R_x = 2r + \frac{2R_x r}{2R_x + r}$$

$$2{R_x}^2 - 5rR_x - 2r^2 = 0$$

$$R_x = \frac{5r \pm r\sqrt{41}}{4}$$

Так как $\sqrt{41} > 5$, корень с минусом не подходит, потому что сопротивление не бывает отрицательным

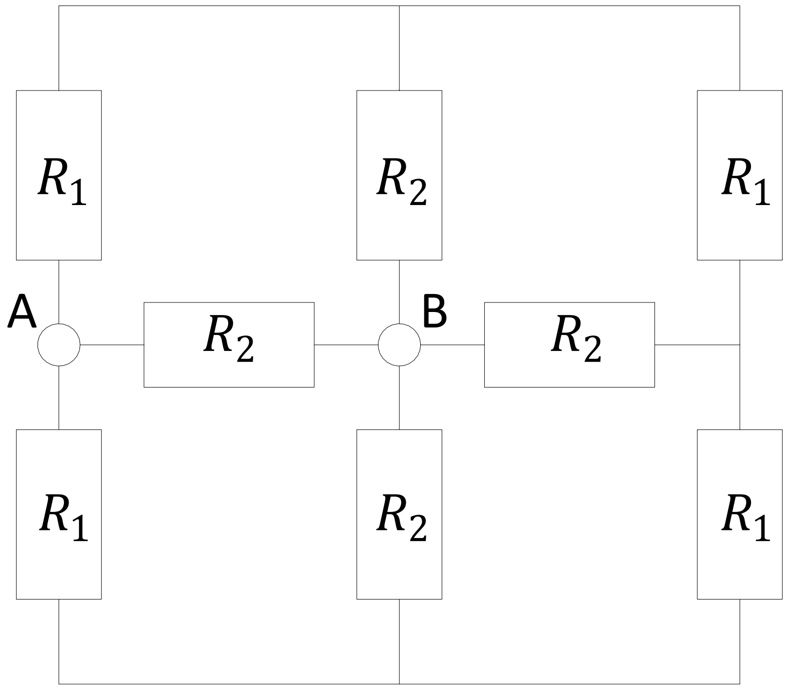
$$R_{AB} = R_x = r(\frac{5 + \sqrt{41}}{4})$$

Задача №2

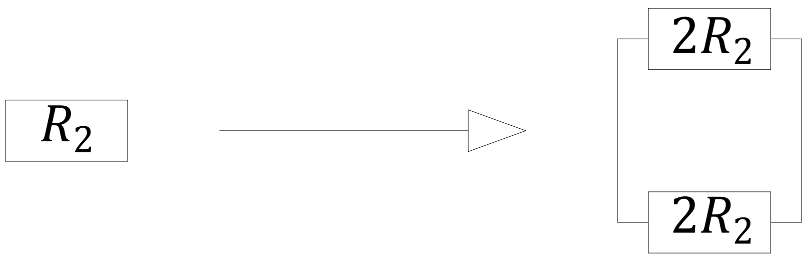
Перерисуем схему, обозначив за R_1 сопротивление дуги $\frac{\pi}{2}$ кольца, а за R_2 сопротивление радиусов.

$$R_1 = 2\lambda\frac{2\pi R}{4} = \lambda\pi R$$

$$R_2 = \lambda R$$



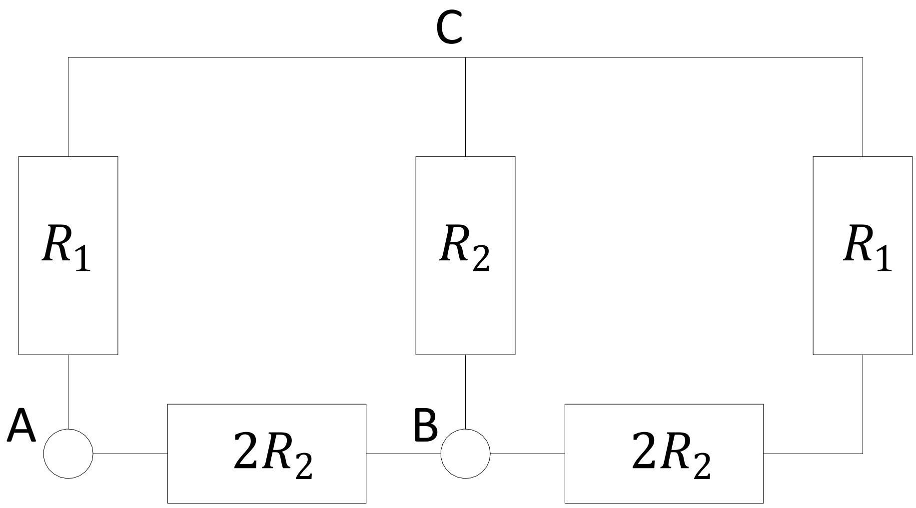
Заметим, что электрическая цепь симметрична относительно оси AB. Вследствие этой симметрии, потенциалы симметричных точек равны, что означает, что если мысленно разделить цепь по оси AB, то из верхней части в нижнюю и из нижней в верхнюю электрического тока не будет. Чтобы разделить цепь напополам по оси AB, необходимо убрать с неё резисторы. Для этого разделим резисторы R_2,находящиеся на оси AB, на параллельное соединение резисторов вдвое большего сопротивления.



Из-за этих преобразований ось симметрии не нарушилась, но на ней не осталось резисторов. Исходя из того, из верхней части в нижнюю и из нижней в верхнюю электрического тока нет, цепь можно рассматривать как параллельное соединение двух половин.

$$R_{AB} = \frac{R_{\text{пол}}}{2}$$

Найдём сопротивление половины $R_{\text{пол}}$, рассчитывая сопротивления по формулам последовательного и параллельного соединений.



Рассмотрим схему половины цепи. Видно, что

$$R_{CB} = \frac{R_2(R_1 + 2R_2)}{R_1 + 3R_2}$$

$$R_{\text{пол}} = \frac{2R_2(R_1 + R_{CB})}{R_1 + 2R_2 + R_{CB}}$$

Подставив все сопротивления через R_1 и R_2, получим

$$R_{\text{пол}} = 2R_2 \frac{{R_1}^2 + 4R_1R_2 + 2{R_2}^2}{{R_1}^2 + 6R_1R_2 + 8{R_2}^2}$$

$$R_{AB} = \frac{R_{\text{пол}}}{2} = R_2 \frac{{R_1}^2 + 4R_1R_2 + 2{R_2}^2}{{R_1}^2 + 6R_1R_2 + 8{R_2}^2}$$

Подставив значения для R_1 и R_2, получим финальную формулу:

$$R_{AB} = \lambda R \frac{\pi^2 + 4\pi + 2}{\pi^2 + 6\pi + 8}$$

Задача №3

I – ток через амперметр.

Начнём рассмотрение U_{AB} от меньших к большим.

Пусть $\varphi_A < \varphi_B$, тогда $U_{AB} < 0$ (ток течёт из B в A)

Так как ток течёт против направления диодов, они будут закрыты при любом $U_{AB} < 0$.

$$I = I_{\text{цепи}} = \frac{U_{AB}}{3R}$$

Пусть $\varphi_A > \varphi_B$, тогда ток течёт из А в В по направлению открытия диодов.

Рассмотрим $U_{AB} \ll U_0$, чтобы все диоды точно были закрыты.

$$I = I_{\text{цепи}} = \frac{U_{AB}}{3R} = I_1 = I_2 = I_3$$

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

Обозначим $\varphi_B = 0$, тогда $U_{AB} = \varphi_A$

$$\varphi_A - \varphi_C = U_1 = I_1 R = \frac{U_{AB}}{3}$$

$$\varphi_C = \varphi_A - \frac{U_{AB}}{3} = \frac{2U_{AB}}{3}$$

Очевидно, что при закрытых диодах в силу симметрии цепи $U_{CB} = U_{AD}$. Для открытия D_1 требуется $U_{CB} \geq U_0$, а для открытия D_2 и D_3 требуется $U_{AD} \geq 2U_0$. Понятно, что первым откроется диод D_1

$$U_{CB} = \varphi_C - \varphi_B = \frac{2U_{AB}}{3}$$

Следовательно, D_1 откроется при $U_{AB} = \frac{3U_0}{2}$, $I = \frac{U_{AB}}{3R}$ справедливо для $U_{AB} < \frac{3U_0}{2}$

Рассмотрим цепь при открытом D_1, но закрытых D_2 и D_3.

$$\varphi_C - \varphi_B = U_0 \text{ (так как } C \text{ и } B \text{ соединяет открытый диод)}$$

$$\varphi_\text{C} = U_0 + \varphi_B = U_0$$

$$I = I_{23} = \frac{\varphi_C - \varphi_B}{2R} = \frac{U_0}{2R}$$

$$U_3 = \varphi_D - \varphi_B$$

$$\varphi_D = U_3 + \varphi_B = I_{23} R = \frac{U_0}{2}$$

Чтобы D_2 и D_3 открылись, необходимо $U_{AD} \geq 2U_0$

$$U_{AD} = \varphi_A - \varphi_D = U_{AB} - \frac{U_0}{2}$$

Чтобы D_2 и D_3 открылись, необходимо $U_{AB} - \frac{U_0}{2} \geq 2U_0$

D_2 и D_3 открываются при $U_{AB} = \frac{5U_0}{2}$, $I = \frac{U_0}{2R}$ при $\frac{3U_0}{2} \leq U_{AB} < \frac{5U_0}{2}$

Рассмотрим цепь при $U_{AB} \geq \frac{5U_0}{2}$, всё диоды открыты

$$\varphi_C - \varphi_B = U_0 \text{ (так как } C \text{ и } B \text{ соединяет открытый диод)}$$

$$\varphi_\text{C} = U_0 + \varphi_B = U_0$$

$$\varphi_A - \varphi_D = 2U_0 \text{ (так как } A \text{ и } D \text{ соединяет 2 открытых диода)}$$

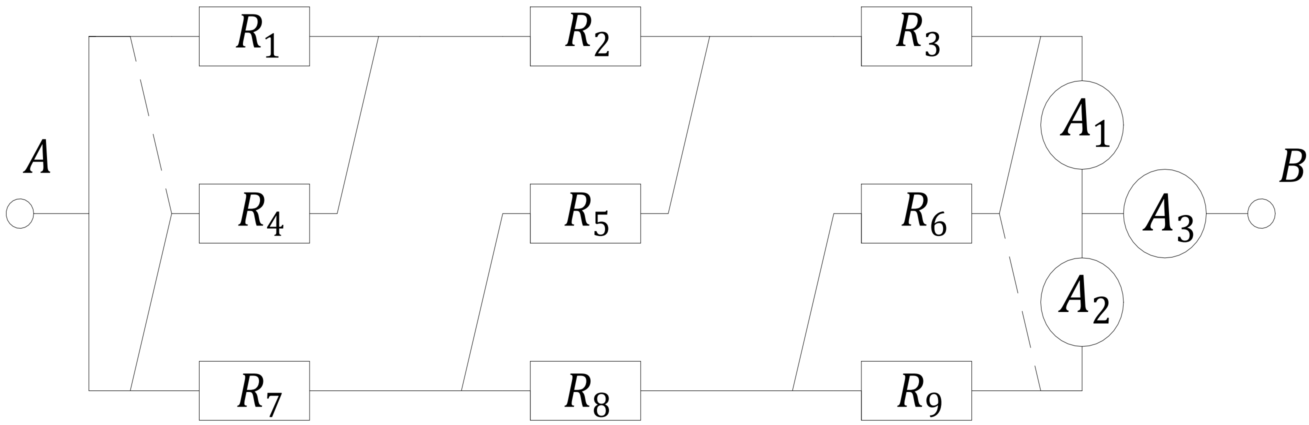
$$\varphi_D = \varphi_A - 2U_0 = U_{AB} - 2U_0$$

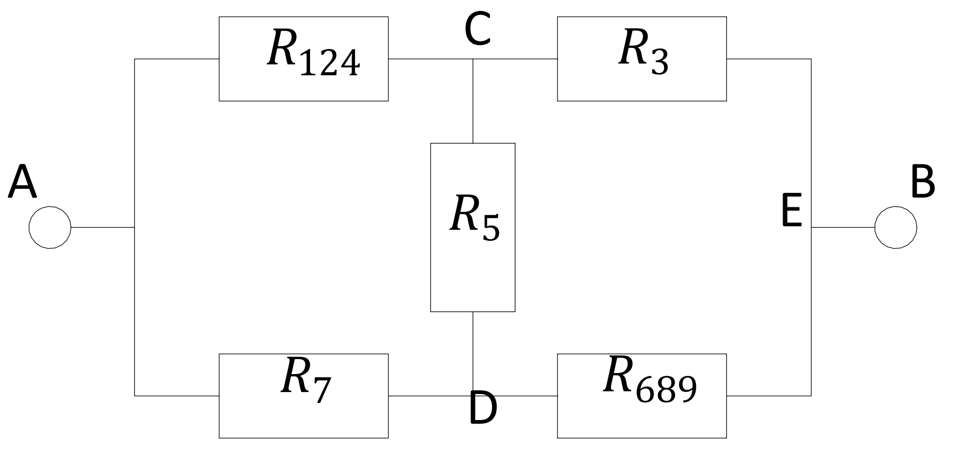
$$I = I_2 = \frac{U_{CD}}{R} = \frac{\varphi_C - \varphi_D}{R} = \frac{3U_0 - U_{AB}}{R} \text{ при } U_{AB} \geq \frac{5U_0}{2}$$

Задача №4

I_0 – ток через цепь, I_{A_1} и I_{A_2} – токи через амперметры.

Необходимо перерисовать схему. Так как амперметры идеальные, для расчётов их удобно заменить на провода. Также заметим, что место подключения резистора можно перемещать вдоль провода, если вдоль перемещения потенциал не меняется (если сопротивление провода равно 0). Пунктиром на рисунке показано новое подключение для 4 и 6 резисторов. Стало видно, что 1 и 4 параллельны между собой и последовательны с 2, 6 и 9 параллельны между собой и последовательны с 8.





Пусть сопротивления резисторов R

$$R_{689} = R_{124} = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}$$

Если поменять местами контакты источника, то мы получим точно такую же схему с такими же токами в другом направлении (токи при замене контактов I'), которые в то же время являются токами симметричных им резисторов (например $I_7{}' = I_3$. Следовательно, $I_{124} = I_{124}{}'$ и $I_{689} = I_{124}{}'$

$$I_{124} = I_{689} \text{ и } I_7 = I_3$$

Введём $I_1 = I_7 = I_3$ и $I_2 = I_{124} = I_{689}$

1 правило Кирхгофа – сумма токов, входящих в узел, равна сумме токов, выходящих из узла.

По 1 правилу Кирхгофа для узла С: $I_1 = I_2 + I_5$, $I_5 = I_1 - I_2$

По 1 правилу Кирхгофа для узла Е: $I_0 = I_1 + I_2$

$$U_{AB} = U_{AC} + U_{CB} = U_{AD} + U_{DC} + U_{CB}$$

Подставим в формулу выше токи и сопротивления вместо напряжений.

$$I_2 \frac{3R}{2} = I_1 R + I_5 R$$

Подставим I_5 из 1 правила Кирхгофа для узла С.

$$\frac{5}{2} I_2 = 2I_1$$

$$I_1 = \frac{5}{4} I_2$$

Подставим это в 1 правило Кирхгофа для узла Е.

$$\frac{9}{4} I_2 = I_0 = 9\text{мА}$$

$$I_2 = 4\text{мА},\ I_1 = 5\text{мА}$$

Вернёмся в начальную схему.

Так как 6 и 9 одинаковы и параллельны, $I_6 = I_9$, $I_6 + I_9 = I_2$

$$I_9 = I_{A_2} = \frac{I_2}{2} = 2\text{мА}$$

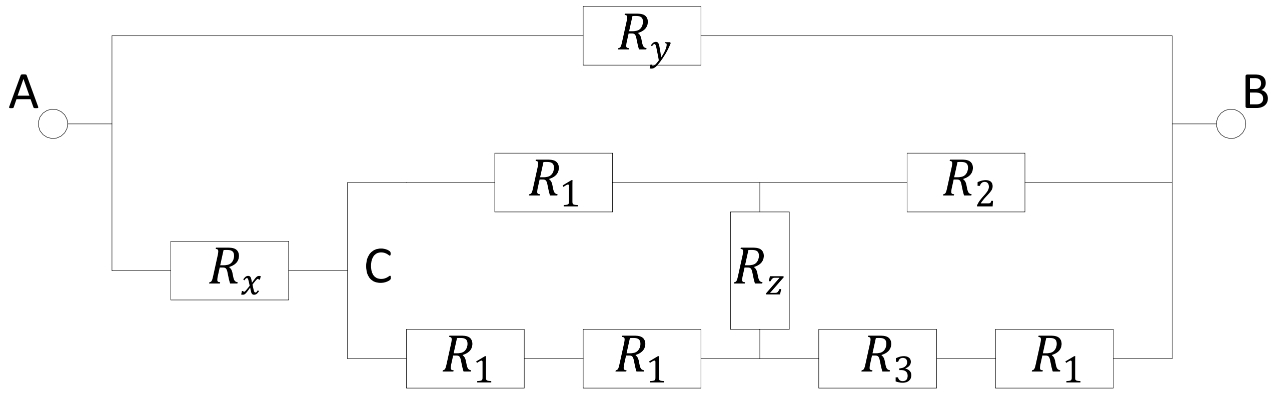
$$I_{A_1} + I_{A_2} = I_0$$

$$I_{A_1} = I_0 - I_{A_2} = 7\text{мА}$$

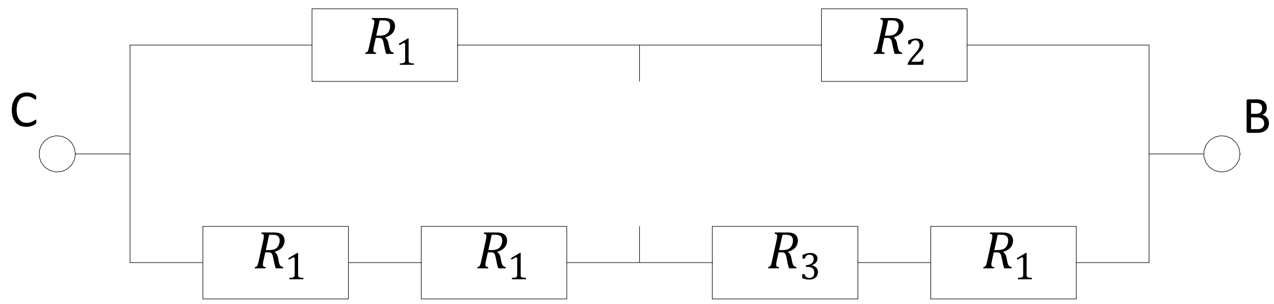
Задача №5

Так как вольтметр идеальный, для расчётов он эквивалентен разрыву цепи.

Перерисуем схему для подключения к A и B



Рассмотрим схему между точками C и B, но без R_z



$$I_{\text{верх}} = \frac{U_{CB}}{3R_1}$$

$$I_{\text{ниж}} = \frac{U_{CB}}{6R_1}$$

Возьмём $\varphi_B = 0$

$$U_{DB} = \varphi_D - \varphi_B = \varphi_D = I_{\text{верх}} 2R_1 = \frac{2}{3} U_{CB}$$

$$U_{EB} = \varphi_E - \varphi_B = \varphi_E = I_{\text{ниж}} 4R_1 = \frac{2}{3} U_{CB}$$

$\varphi_D = \varphi_E = \frac{2}{3} U_{CB}$ – следовательно, между D и E ток не течёт, и резистор R_z ни на что не влияет, он может быть любым, мы же его уберём из основной цепи для расчётов.

Сопротивление между C и B $R_э = \frac{(R_1+R_2)(3R_1+R_3)}{4R_1+R_2+R_3} = 2\text{кОм}$

Вернёмся в цепь при подключении к A и B.

$$U_0 = U_x + U_1$$

$$U_x = U_0 - U_1$$

$$I_x = I_{CB}$$

$$\frac{U_x}{R_x} = \frac{U_1}{R_э}$$

$$R_x = \frac{R_э U_x}{U_1} = R_э \frac{U_0 - U_1}{U_1} = 3\text{кОм}$$

При подключении к A и C получается такая же схема, только R_x и R_y меняются местами.

$$U_0 = U_y + U_2$$

$$U_y = U_0 - U_2$$

$$I_y = I_{CB}$$

$$\frac{U_y}{R_y} = \frac{U_2}{R_э}$$

$$R_y = \frac{R_э U_y}{U_2} = R_э \frac{U_0 - U_2}{U_2} = 2\text{кОм}$$

Теперь посчитаем токи при обоих подключениях как у параллельных соединений.

$$I_{AB} = I_x + \frac{U_0}{R_y} = \frac{U_1}{R_э} + \frac{U_0}{R_y} = 7\text{мА}$$

$$I_{AC} = I_y + \frac{U_0}{R_x} = \frac{U_2}{R_э} + \frac{U_0}{R_x} \approx 5{,}8\text{мА}$$

Семенова Лилия Игоревна

Методическое пособие для учащихся 9 классов для подготовки к участию в олимпиадах с подробными решениями

Учебно-методическое пособие

Частное общеобразовательное учреждение «Лицей № 36 открытого акционерного общества «Российские железные дороги»

664005, Россия, Иркутская область, Иркутск, ул. Профсоюзная, 3

Подписано в печать 10.03.2022.

Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 1,74.

Заказ № 22 – 000.

Тираж 50 экз.