

Матбой №2D

1. Дан прямоугольный треугольник ABC , точка M – середина гипотенузы AB , точка D выбрана на катете AC так, что $AD > DC$, точка E – точка пересечения прямых MD и BC . Оказалось, что $AB = ED$. Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BEM$.
2. Докажите, что для всех положительных a выполняется неравенство $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$.
3. На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если A и B , а также B и C – друзья, то A и C – друзья; в) если A и B , а также B и C – враги, то A и C – друзья; г) если A и B друзья, а B и C – враги, то A и C – враги?
4. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?
5. Найдите все пары целых чисел a, b , для которых $a^2 + b + 2 = a + b^2$.
6. На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?

Матбой №2D

1. Дан прямоугольный треугольник ABC , точка M – середина гипотенузы AB , точка D выбрана на катете AC так, что $AD > DC$, точка E – точка пересечения прямых MD и BC . Оказалось, что $AB = ED$. Докажите, что $\angle ABC = 3\angle BEM$.
2. Докажите, что для всех положительных a выполняется неравенство $a^{40} + \frac{1}{a^{16}} + \frac{2}{a^4} + \frac{4}{a^2} + \frac{8}{a} \geq 16$.
3. На дискотеку пришло 100 человек. Сколькими способами можно установить отношения между участниками дискотеки так, чтобы выполнялись следующие условия: а) каждые два из них или друзья, или враги; б) если A и B , а также B и C – друзья, то A и C – друзья; в) если A и B , а также B и C – враги, то A и C – друзья; г) если A и B друзья, а B и C – враги, то A и C – враги?
4. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 2021. Каждую минуту Вася стирает с доски все неположительные числа, а также все положительные числа, у которых есть хотя бы две совпадающие цифры, а затем все оставшиеся на доске числа уменьшает на 1. Через сколько минут доска впервые окажется пустой?
5. Найдите все пары целых чисел a, b , для которых $a^2 + b + 2 = a + b^2$.
6. На прямой расположили пронумерованные от 1 до 4041 лампы. Вначале часть ламп горит, остальные не горят. За один ход можно выбрать две лампы с номерами, частное которых является простым числом, и изменить их состояние на противоположное – горящую выключить, не горящую – включить. Можно ли включить все лампы с номерами от 1 до 2021, не зависимо от первоначального набора включённых ламп?