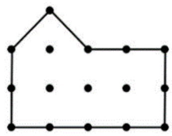
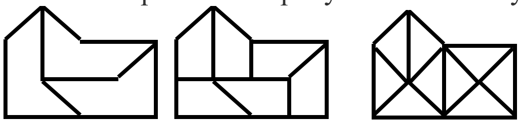
Матбой №2ABC

1. *Васе на день рождения испекли торт (на рисунке). Он не знает, сколько гостей смогут к нему прийти – 2, 5 или 8. Можно ли разрезать этот торт на 3, 6 и 9 равных частей?*



Ответ: можно.

Решение. Разрезание на рисунке. Если получен 1 случай – 4 балла, 2 случая – 6 баллов.



2. *В волшебной стране цифры 2 и 5 считаются несчастливыми и их не используют в нумерации домов. Если построенный дом попадает на номер с плохой цифрой, то номер просто пропускают и выбирают ближайший неиспользованный номер, состоящий только из хороших цифр. На главной улице 2021 дом. Верно ли, что есть два дома, произведение номеров которых равно 2021?*

Ответ: верно.

Решение: $2021 = 43 \times 47$.

3. *В зале заседаний Конгресса Острова рыцарей и лжецов сидели 2021 конгрессмен. В какой-то момент один конгрессмен вышел. Один из оставшихся, поглядев ему вслед, заметил: «Ушедший – лжец!» После чего встал и тоже вышел. Второй сказал: «Оба ушедшие – лжецы» и тоже ушел. Далее каждый из оставшихся уходил, говоря: «Все ушедшие – лжецы». Пока последний оставшийся в зале печально не констатировал: «Да, все ушедшие – лжецы». Определите, сколько в зале было лжецов первоначально. (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду).*

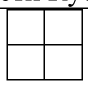
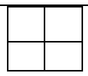
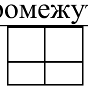
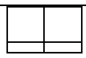
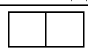
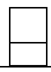
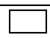
Ответ: 2020.

Решение. Если хоть кто-то сказал правду, то все перед ним были лжецами, а он сам – рыцарем. Следовательно, все остававшиеся после него (если он не последний) тоже лжецы. В этом случае точно есть 1 рыцарь и 2020 лжецов. А если никто не сказал правду, то самый первый ушедший не был лжецом, тогда он рыцарь, а все остальные солгали, и в этом случае снова 2020 лжецов.
Если не рассмотрен случай первого рыцаря – дыра в 4 балла.

4. *Игрушку Кубарик можно распилить одним разрезом на один кубик $2\times2\times2$ и один кубик $3\times3\times3$ (кубики соединены по фигуре ненулевой площади). Какова может быть площадь поверхности Кубарика, если известно, что она является натуральным числом?*

Ответ: 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77.

Решение. Площадь поверхности кубика $2\times2\times2$ равна $4\times6 = 24$, а кубика $3\times3\times3$ – $9\times6 = 54$. Общая площадь 78. Значит, наибольшая площадь поверхности Кубарика может быть равна 77 (если кубики касаются по половине квадрата 1×1). Наименьшая поверхность будет, если кубики касаются по грани меньшего кубика. Тогда площадь поверхности Кубарика 70. Все промежуточные значения площади поверхности достигаются.

Пересечение								
Площадь	70	71	72	73	74	75	76	77

5. *На доске в ряд по возрастанию записаны пять простых чисел. Каждые два соседних числа отличаются на 6. Какое число может стоять на первом месте?*

Ответ: 5.

Решение. Одно из чисел обязательно делится на 5 (можно проверить по остаткам), поэтому простым оно может быть, только если равно 5. Меньше него на 6 простых чисел не бывает (меньше 0). Больше него числа 11, 17, 23, 29 – действительно простые.

6. *Трехзначное число разделили на сумму его цифр. Какое наименьшее натуральное число могло получиться?*

Ответ: 11.

Решение. Пример: 198 : 18 = 11. Оценка. Пусть получится число не больше 10. Тогда $100a + 10b + c \leq 10(a + b + c)$. То есть $90a \leq 9c$, $10a \leq c$. Так как a хотя бы 1, то c – хотя бы 10, так не бывает.
Пример – 6 баллов, оценка – 6 баллов.