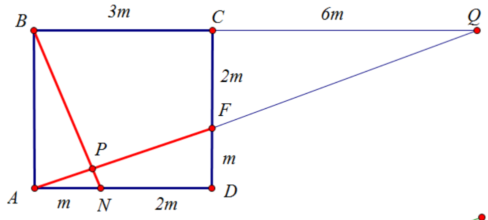
Матбой №1D

1. *ABCD – квадрат. Точки N и F на сторонах AD и DC такие, что AN : ND = 1 : 2, CF : FD = 2 : 1. Отрезки BN и AF пересекаются в точке P. Какую часть площади квадрата занимают треугольник ABP и четырехугольник NPFD вместе взятые?*

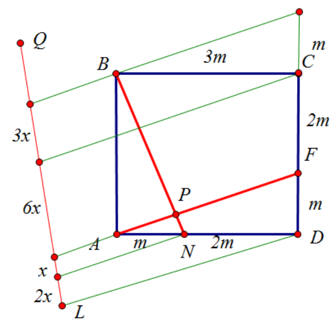
Ответ: 3/10.

Решение. Пусть $S_{ABCD} = S$. Тогда S_{ABN} = S_{AFD} = S/6, следовательно, S_{ABP} = S_{NPFD}. Задача сводится к нахождению отношения BP : BN.

Способ 1. Метод бантиков (8 кл). Из подобия AFD и CFQ следует, что CQ = 6m. Из подобия APN и BPQ следует, что BP : PN = 9 : 1 или BP : BN = 9 :10. Тогда S_{ABP} = 9S_{ABN}/10 = 3S/20. 2S_{ABP} = 6S/20 = 3S/10.



Способ 2. Метод паспортной прямой (7-8кл). Проведем прямую QL и из точек N, D, C и B отрезки, параллельные прямой AF до пересечения с QL. Применив теорему о пропорциональных отрезках, получим на прямой QL (паспортная прямая) отрезки с известными отношениями. BP : PN = 9x : x или BP : BN = 9 :10. Тогда S_{ABP} = 9S_{ABN} /10 = 3S/20. 2S_{ABP} = 6S/20 = 3S/10.



2. *Докажите, что* $\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d}{c}+\frac{a+b+c}{d}\geq 12$, *если a, b, c и d – положительные числа.*

Решение. Разобьём левую часть на 12 дробей и сгруппируем вместе взаимнообратные дроби.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{d}+\frac{d}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$$

По неравенству Коши получаем для каждой пары неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$. Складывая шесть таких неравенств, получаем нужное неравенство.

3. *Можно ли расположить на плоскости семь прямых линий так, чтобы среди точек их пересечения было хотя бы 6, в которых пересекаются ровно три из этих прямых, а также хотя бы 4, в которых пересекаются ровно две из этих прямых?*

Ответ: Нет.

Решение. Пусть такое возможно. Посчитаем количество пар прямых. С одной стороны, их не более 7 · 6/2 = 21. С другой стороны, их не менее 6 · 3 + 4 = 22 – противоречие.

4. *Можно ли расставить ниже главной диагонали доски 2021 × 2021 не бьющих друг друга 2019 ферзей?*

Решение. В каждой диагонали, параллельной главной, не более 1 ферзя. Всего диагоналей 2020. Кроме того, в наименьших 4 диагоналях в совокупности не более 2 ферзей (небольшой перебор). Отсюда получаем искомую оценку, что ферзей не более 2018.

5. *Найдите все нечетные натуральные числа вида* $\frac{p+q}{p-q}$, *где p и q – простые числа.*

Ответ: Только 5.

Решение. Поскольку $\frac{p+q}{p-q}$ должно быть натуральным числом, то $p > q$ и $p + q \,\vdots\, p - q$. Тогда $(p + q) + (p - q) \,\vdots\, p - q$ или $2p \,\vdots\, p - q$. Делители у числа $2p$ – это 1, 2, p и $2p$. Так как $p - q < p$, то или $p - q = 1$, или $p - q = 2$. Если $p - q = 1$, то $p = 3$, $q = 2$, откуда получаем ответ 5. Если $p - q = 2$, то p и q – последовательные, а потому нечётные простые числа, но тогда их полусумма $\frac{p+q}{2}$ – это чётное число (между ними).

6. *На поверхности кубика с ребром 2 отмечены зелёным все вершины, середины ребер и центры граней. Кузнечик может перепрыгнуть из зелёной точки в другую зелёную точку, находящуюся на расстоянии ровно 1. Может ли кузнечик выпрыгнуть из какой-то зелёной точки, посетить ровно по одному разу все остальные и вернуться в исходную?*

Ответ: Нет, не может.

Решение. Покрасим все зелёные точки в шахматном порядке в белый и чёрный цвета, притом вершины кубика – в белый. Тогда белыми будут все 8 вершин кубика и все 6 центров граней, а чёрными – 12 середин рёбер. Поскольку при движении белые и чёрные точки должны чередоваться, то для того, чтобы обойти их все по разу, их должно быть поровну, что не так.